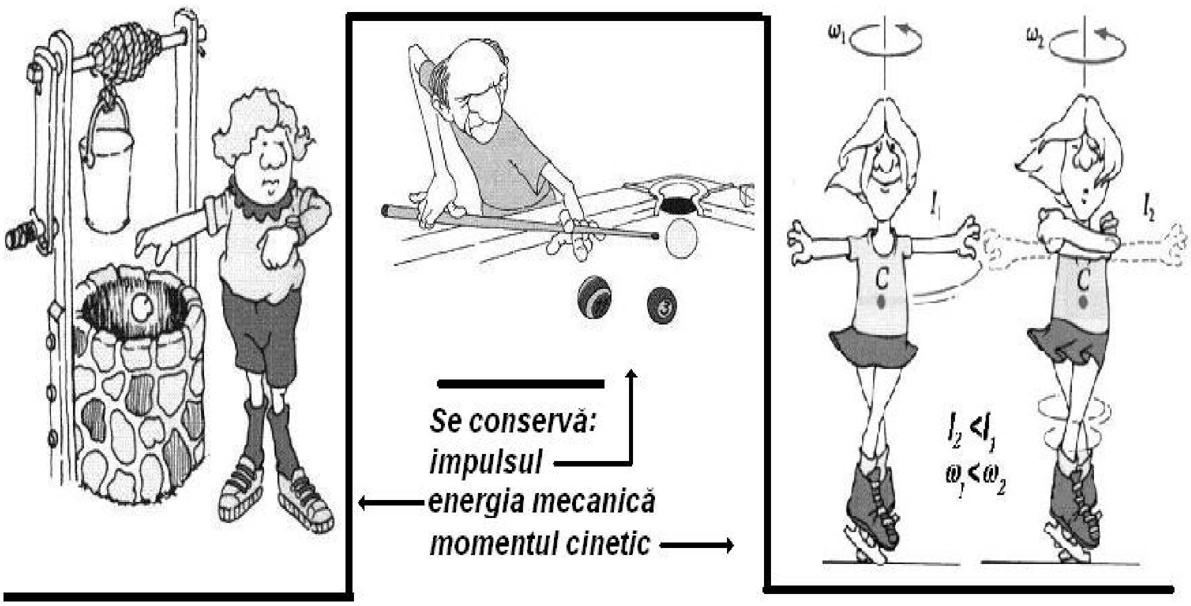
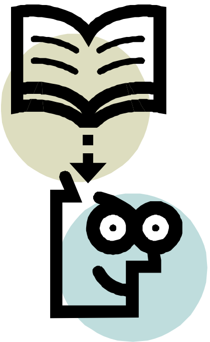
Unitatea de învăţare 4

DINAMICA

Cuprins **Pagina**



4.1 Obiectivele unităţii de învăţare numărul 4



Când vei termina de studiat acest capitol vei fi capabil :

- *să deduci şi să enunţi teoremele de variaţie pentru impuls, energie cinetică şi moment cinetic pentru un punct material şi pentru un sistem de puncte materiale;*
- *să enunţi legile de conservare a impulsului, energiei şi moment cinetic pentru sistemele de puncte materiale;*
- *să aplici teoremele de variaţie, legile de conservare studiate şi relaţiile derivate din acestea în studiul unor procese mecanice;*
- *să explici într-un limbaj fizic adecvat fenomenele de ciocnire;*
- *să aplici noţiunile, legile şi teoremele studiate în rezolvarea de probleme;*
- *să utilizezi cunoştinţele dobândite în analiza unor sisteme tehnologice şi biologice;*
- *să realizezi conexiuni între fenomenele mecanice din mediu şi noţiunile studiate;*

Dinamica studiază mişcarea corpurilor ţinând seama de forţele care o produc. Din legea fundamentală a dinamicii

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \qquad (4.1)$$

rezultă trei teoreme privind mişcarea mecanică: teorema impulsului, a momentului cinetic şi a energiei cinetice.

4.2 Teorema impulsului

Legea fundamentală a mecanicii:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{p} \overset{def}{=} m\vec{v}, \qquad (4.2)$$

unde $\vec{p} = m\vec{v}$ este impulsul punctului material (cantitatea de mişcare), afirmă că forţa aplicată punctului material este egală cu derivata impulsului punctului material în raport cu timpul. Din această ecuaţie rezultă:

$$\vec{F}dt = d(m\vec{v}) = d\vec{p}, \qquad (4.3)$$

$$\vec{H} \overset{def}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1. \qquad (4.4)$$

În mecanica clasică, masa este constantă, de aceea:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \qquad (4.5)$$

Integrala $\vec{H}$ se numeşte impulsul forţei.

Teorema impulsului.
Impulsul forţei rezultante aplicate punctului material este egal cu variaţia impulsului punctului material.

Conform principiului III, forţa $\vec{F}$ este efectul interacţiunii punctului material cu alte corpuri, asupra cărora se exercită acţiunea $\vec{F}' = -\vec{F}$ din partea punctului material. Putem astfel scrie:

$$-\vec{F}' = \vec{F} \Rightarrow -\int \vec{F}'dt = \int \vec{F}dt = \Delta\vec{p}\,, \qquad (4.6)$$

prin urmare, creşterea vectorială a impulsului punctului material se obţine pe seama scăderii corespunzătoare a impulsului corpurilor cu care interacţionează. Avem deci un transfer de impuls în procesul interacţiunii, de la un corp la altul, realizat prin intermediul forţei. Impulsul este o măsură vectorială a mişcării. Teorema impulsului exprimă o lege de conservare a mişcării materiei. Existenţa mărimii fizice impuls şi a legii fizice de conservare a impulsului este legată de proprietatea de omogenitate a spaţiului (simetria la translaţii).

În S.I. impulsul se măsoară în $Ns = kg\,\dfrac{m}{s}$,

4.3 Teorema momentului cinetic

Dacă un rigid are un punct fix (o articulaţie) în jurul căruia se poate roti liber, atunci aplicând o forţă rigidului, el se va roti în jurul unei axe ce trece prin articulaţie, perpendiculară pe planul definit de articulaţie şi forţă.

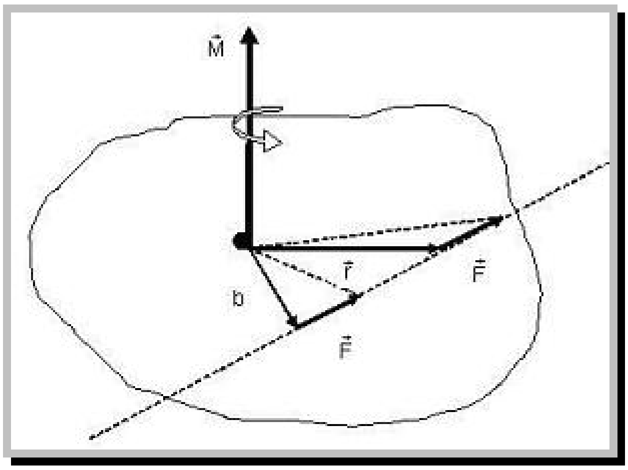
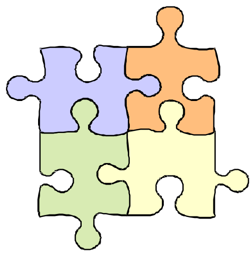


Figura 4.1



Dacă suportul forţei trece prin articulaţie, rigidul nu se roteşte. Efectul de rotaţie este determinat de forţă şi de distanţa suportului său până la articulaţie, numit braţul forţei – (notat cu *b* în figura 4.1). Ţinând seama

de direcţia axei şi sensul rotaţiei, putem spune că efectul de rotaţie este dat de momentul forţei faţă de polul O, definit de produsul vectorial:

$$\vec{M} \stackrel{def}{=} \vec{r} \times \vec{F}, \mathrm{M} = \mathrm{rFsin}\alpha = \mathrm{Fb}, \qquad (4.7)$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţei, iar b este braţul forţei, adică distanţa de la articulaţie la dreapta de acţiune a forţei. Momentul forţei se măsoară în Nm. Momentul forţei nu se schimbă dacă forţă alunecă pe suportul său. Dacă rigidul are o axă fixă în jurul căreia se poate roti liber, atunci o forţă paralelă cu axa de rotaţie sau concurentă cu aceasta nu produce rotaţie. Efectul de rotaţie este produs numai de componenta transversală pe axă a forţei, înmulţită cu braţul ei, adică momentul forţei în raport cu axa:

$$M_{\parallel} \stackrel{def}{=} F_{\perp} b\,. \qquad (4.8)$$

În mod analog definirii momentului forţei, se defineşte momentul oricărui vector, de exemplu momentul impulsului, numit moment cinetic*:*

$$\vec{J} \stackrel{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}\,. \qquad (4.9)$$

Momentul cinetic se măsoară în SI în J.s.

Mişcarea unui titirez de exemplu este determinată de momentul său cinetic

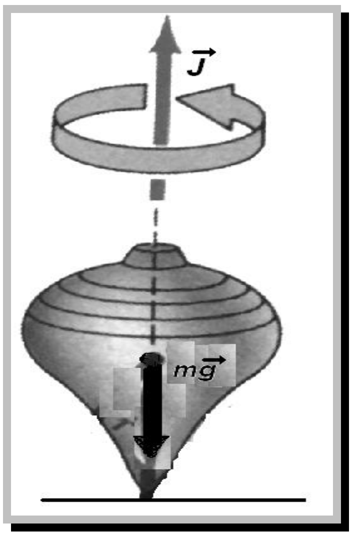
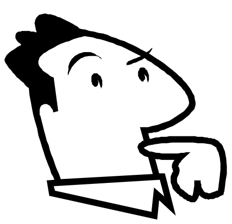


Figura 4.2



Dacă derivezi relaţia (4.8) *în raport cu timpul şi înlocuieşti derivata impulsului prin forţă, conform ecuaţiei fundamentale, vei obţine:*

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \qquad (4.10)$$

deoarece

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0, \qquad (4.11)$$

fiind vectori paraleli şi deci:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{J}}{dt} = \dot{\vec{J}} \, , \qquad (4.12)$$

$$\vec{M} = \dot{\vec{J}} \, . \qquad (4.13)$$

Momentul forţei este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul. Momentul forţei şi momentul cinetic se consideră faţă de acelaşi punct fix **(pol),** într-un sistem de referinţă inerţial.

Pol.
Punct fix faţă de care într-un sistem inerţial se consideră momentul forţei şi momentul cinetic

Teorema momentului cinetic.

Impulsul momentului (sau momentul impulsului) forţei aplicate punctului material este egal cu variaţia momentului cinetic al punctului material

$$\vec{K} \overset{def}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \int \vec{r} \times d\vec{H} = \vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \Delta\vec{J} \; . \qquad (4.14)$$

Dacă nu există o forţă care să determine un moment care să acţioneze asupra unui corp, momentul cinetic al acestuia este invariabil.
Observaţie. În mecanica cuantică se arată, şi experienţa confirmă, că în domeniul atomic se manifestă caracterul discret, cuantificat al momentului cinetic.
Modulul acestui vector nu poate avea ca valori decât multipli ai unei cantităţi elementare

$$J = j\hbar \, . \qquad (4.15)$$

unde

$$\begin{cases} \mathrm{j} = 0,1,2,\ldots, \\ \hbar = \dfrac{\mathrm{h}}{2\pi} = 1{,}0545 \cdot 10^{-34}\, Js \\ (\text{h - constanta Planck}) \end{cases} \qquad (4.16)$$

4.4 Teorema energiei cinetice

O măsură a efectului util al forţei care produce deplasări este dată de lucrul mecanic, definit de produsul dintre deplasare şi componenta forţei pe direcţia deplasării, deoarece componenta normală a forţei nu poate contribui la deplasarea dată (fapt observat încă de Euler). Astfel, lucrul mecanic este definit prin produsul scalar dintre forţa care acţionează asupra punctului material şi deplasare:

$$\begin{cases} dL \overset{def}{=} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}\, dt \, , \\ L \overset{def}{=} \int \vec{F} d\vec{r} = \int \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = \int \left(F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z\right) dt \end{cases} \; . \qquad (4.17)$$

În cazul forţei constante:

$$L=\int \vec{F}d\vec{r}=\vec{F}\int d\vec{r}=\vec{F}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)=\vec{F}\Delta\vec{r}=Fd\cos\left(\vec{F},\vec{d}\right), \vec{F}=\text{const}. \quad (4.18)$$

Într-o mişcare curbilinie numai componenta tangenţială a forţei efectuează lucru mecanic şi nu, componenta normală.
Pentru unitatea de lucru mecanic rezultă:

$$[L]=[F][d]=1kg\frac{m^2}{s^2}=1J \text{ in SI}. \quad (4.19)$$

Unitatea de lucru mecanic în SI, (1J) este egală cu lucrul mecanic efectuat de o forţă unitate (1N) pe un drum egal cu unitatea (1m) în direcţia forţei.

O unitate des folosită este kilowattora (kWh):

$$1kWh=1kW\cdot 1h=3.6\cdot 10^6 J. \quad (4.20)$$

Figura 4.3 Forţele interne nu au rol în accelerarea sistemului. Când baronul Munchhausen se trage de păr acţiunea mâinii şi reacţiunea părului sunt forţe interne. Nu există acceleraţie chiar dacă cele două forţe ar face lucru mecanic

Definim puterea medie în intervalul de timp Δt prin raportul dintre lucrul mecanic L efectuat în acest interval şi intervalul Δt:

$$\overline{P}=\frac{L}{\Delta t} \quad (4.21)$$

şi puterea instantanee sau momentana:

$$P\overset{def}{=}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{L}{\Delta t}=\frac{dL}{dt}. \quad (4.22)$$

Ţinând seama de relaţia de definiţie a lucrului mecanic, rezultă:

$$P=\frac{dL}{dt}=\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\vec{v}, \quad (4.23)$$

adică puterea dezvoltată de o forţă este egală cu produsul scalar dintre forţă şi viteză. Pentru unitatea de putere rezultă:

$$[P] = \frac{[L]}{[t]} = 1kg\,\frac{m^2}{s^3} = 1\frac{J}{s} = 1W \text{, in SI}. \qquad (4.24)$$

Figura 4.4 Forţa externă de interacţiune cu copacul, dublul forţei cu care omul trage de funie are rol în accelerarea sistemului. Se face lucru mecanic

Înmulţind scalar formula fundamentală (4.1) cu $d\vec{r} = \vec{v}dt$, obţinem:

$$\begin{cases} dL = \vec{F}d\vec{r} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}\vec{v}dt = \vec{v}d(m\vec{v}) \\ dL = \vec{v}^{\,2}dm + m\vec{v}\vec{d} = v^2dm + mvdv \end{cases} \qquad (4.25)$$

unde

$$\vec{v}^{\,2} = \vec{v}\vec{v} = v^2, \qquad (4.26)$$

care prin diferenţiere dă

$$\vec{v}d\vec{v} = vdv \qquad (4.27)$$

şi cu m=const, rezultă:

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = mvdv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_c, \qquad (4.28)$$

$$L = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \Delta E_c = E_{c1} - E_{c2}, \qquad (4.29)$$

unde:

$$E_c \overset{def}{=} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \qquad (4.30)$$

se numeşte energia cinetică a punctului material.

Teorema energiei cinetice.
Lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă, aplicată punctului material, este egal cu variaţia energiei cinetice a punctului material.

*Lucrul mecanic al **forţelor conservative** - este independent de drum - este egal cu diferenţa dintre valorile finale şi iniţiale ale unei funcţii numită energie potenţială - este complet recuperabil*

Forţele neconservative *se numesc* ***disipative***

Energia cinetică este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a aduce corpul din repaus până la viteza v sau altfel spus, cu lucrul mecanic restituit de corp la oprirea sa de la viteza v. Energia cinetică este o mărime scalară a mişcării. Existenţa mărimii fizice energie cinetică şi a legii fizice de conservare a energiei cinetice este legată de proprietatea de omogenitate a timpului (simetria la translaţii temporale).

Mişcarea mecanică se transmite de la un corp la altul în procesul interacţiunii lor prin intermediul forţei. Impulsul forţei

$$\vec{H} = \int_1^2 \vec{F} dt \,, \qquad (4.31)$$

impulsul momentului forţei

$$\vec{K} = \int_1^2 \vec{M} dt = \int \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) dt \qquad (4.32)$$

şi lucrul mecanic al forţei

$$L = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} \qquad (4.33)$$

măsoară cantitativ mişcarea mecanică transmisă, fiind egale respectiv cu variaţia impulsului $\vec{p} = m\vec{v}$, a momentului cinetic $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ şi a energiei cinetice $E_c = \frac{mv^2}{2}$ a punctului material.

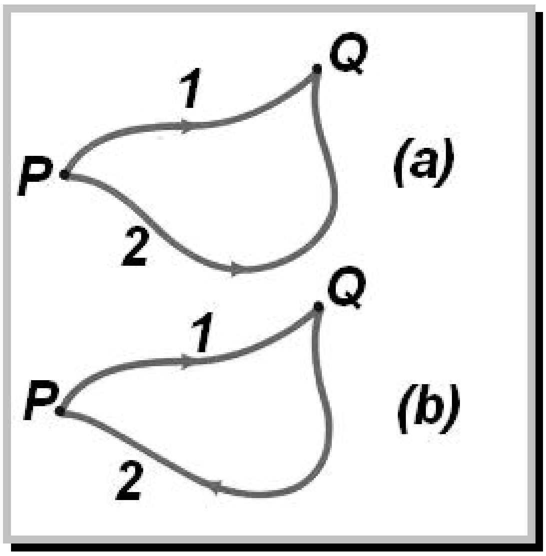
4.5 Conservarea energiei mecanice

Consideră mişcarea particulei într-un câmp de forţe conservativ. Atunci, aplicând teorema energiei cinetice, obţii:

$$\begin{cases} L = \int \vec{F} d\vec{r} = \Delta E_c = -\Delta U \Rightarrow \\ \Delta(E_c + U) = 0 \Rightarrow \\ E_c + U = E = const \end{cases} \qquad (4.34)$$

Relaţia ultimă din acolada de mai sus exprimă *teorema conservării energiei mecanice*. Într-un câmp de forţe conservativ are loc în timpul mişcării o transformare reciprocă a energiei cinetice şi potenţiale, suma lor rămânând constantă.

Pentru un câmp de forţe neconservativ (disipativ), când lucrul mecanic depinde de traiectorie şi de modul de mişcare, nu există energie potenţială, şi atunci energia mecanică nu se conservă, ci se transformă în alte forme de energie. De exemplu, în cazul forţelor de frecare, când lucrul mecanic depinde de lungimea drumului şi nu este nul pe un drum închis, energia mecanică se transformă în căldură.



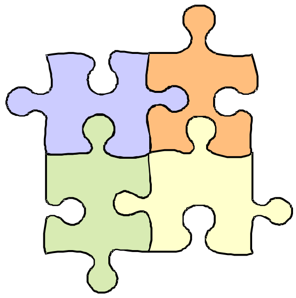


Figura 4.5 La evoluţia într-un câmp de forţe conservativ între punctele P şi Q pe drumurile $P \to 1 \to Q$ sau $P \to 2 \to Q$ variaţia energiei potenţiale a corpului este aceeaşi(Imaginea (a)). La evoluţia corpului pe drumul închis $P \to 1 \to Q \to 2 \to P$ (imaginea(b)) energia potenţială nu variază - lucrul mecanic se consumă şi se recuperează.

Poţi presupune că punctul material se află într-un câmp de forţe conservativ $\vec{F}(\vec{r})$ care derivă deci dintr-un potenţial $U(\vec{r})$ şi este supus în acelaşi timp la o forţă neconservativă (disipativă) $\vec{F}'$. Aplicând din nou teorema energiei cinetice, obţii pentru acest caz:

$$\begin{cases} L = \int (\vec{F} + \vec{F}')d\vec{r} = \Delta E_c = \int \vec{F} d\vec{r} + \int \vec{F}' d\vec{r} = -\Delta U + L' \Rightarrow \\ L' = \int \vec{F}' d\vec{r} = \Delta(E_c + U) \end{cases} \qquad (4.35)$$

deci, lucrul mecanic al forţelor neconservative (disipative) aplicate punctului material este egal cu variaţia energiei mecanice a punctului material.
Pentru câmpul gravitaţional terestru în apropierea suprafeţei pământului, lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate $m\vec{g}$ între două puncte P_1 Şi P_2 depinde numai de diferenţa de nivel:

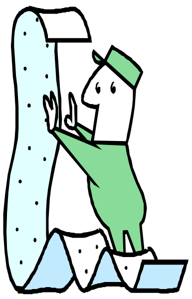
$$U = -\int_0^z (-mg)dz = mgz \ . \qquad (4.36)$$

Câmpul gravitaţional este conservativ. Suprafeţele echipotenţiale sunt plane orizontale, liniile de forţă sunt drepte verticale, iar forţa de greutate este îndreptată în jos, în sensul descreşterii energiei potenţiale U.

4.6 Sistemul mecanic

Prin sistem mecanic vei înţelege un sistem de puncte materiale, care nu sunt independente, ci supuse la legături reciproce, astfel încât formează un "întreg" mai mult sau mai puţin deformabil. Principiile şi legile mecanice pentru sistemul de puncte materiale se deduce din principiile formulate pentru punctul material.

4.6.1 Dinamica sistemului mecanic



Asupra fiecărui punct m_k din sistem se exercită, pe de o parte, forţe interne $\vec{F}_{kl}$ din partea celorlalte puncte materiale m_l ale sistemului şi, pe de altă parte, forţe externe $\vec{F}_k$ din partea corpurilor externe, care nu fac parte din sistem. Conform principiului III, forţa (acţiunea) $\vec{F}_{kl}$ exercitată de particula m_l asupra particulei m_k este egală în modul şi de sens opus cu forţa reciprocă (reacţiunea) $\vec{F}_{lk}$ exercitată de particula m_k asupra particulei m_l:

$$\vec{F}_{kl} = -\vec{F}_{lk} \Rightarrow \vec{F}_{kl} + \vec{F}_{lk} = 0, (\vec{F}_{kk} \equiv 0), \qquad (4.37)$$

adică forţele interne sunt întotdeauna perechi, două câte două egale în modul şi de sens opus (forţe de interacţiune), de aceea însumate fiind pentru întregul sistem dau rezultanta nulă:

$$\vec{F} = \sum_{k,l} \vec{F}_{kl} = 0. \qquad (4.38)$$

Forţa internă rezultantă asupra particulei m_k este:

$$\vec{F}_k = \sum_{l}^{N} \vec{F}_{kl}, \qquad (4.39)$$

unde N este numărul total de particule din sistem, şi prin însumarea asupra tuturor particulelor din sistem regăsim:

$$\vec{F} = \sum_{k} \vec{F}_k = \sum_{k,l} \vec{F}_{kl} = 0. \qquad (4.40)$$

Momentul rezultant al forţelor interne este de asemenea nul:

$$\vec{M} = \sum_{k} \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{F}_{kl} = 0. \qquad (4.41)$$

Într-adevăr, ultima sumă este formată din perechi de termeni nuli:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0, \qquad (4.42)$$

deoarece

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \qquad (4.43)$$

reprezintă momentul aceleiaşi forţe $\vec{F}_{12}$ faţă de acelaşi pol, sau deoarece $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ este paralel cu $\vec{F}_{12}$.

> *Teoremă.*
> *Rezultanta forţelor interne şi momentul rezultant al forţelor interne faţă de orice pol sunt nule.*

Lucrul mecanic al forţelor interne nu este, în general, nul:

$$\begin{cases} \vec{F}_{kl} d\vec{r}_k + \vec{F}_{lk} d\vec{r}_l = \vec{F}_{kl} d(\vec{r}_k - \vec{r}_l) = \vec{F}_{kl} d\vec{r}_{kl} \\ L = \sum_{k} \vec{F}_k d\vec{r}_k = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \vec{F}_{kl} d\vec{r}_{kl} \end{cases}. \qquad (4.44)$$

În cazul corpurilor rigide (nedeformabile), distanţele reciproce r_{kl} sunt constante:

$$\vec{r}_{kl} = 0 \Rightarrow d\vec{r}_{kl} = 0 \Rightarrow L = 0 . \qquad (4.45)$$

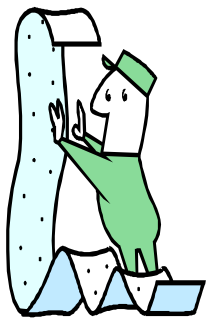
Pentru corpurile rigide, nedeformabile, lucrul mecanic al forţelor interne este nul. Pentru corpurile deformabile, forţele interne pot face lucru mecanic.
Poţi aplica ecuaţia fundamentală fiecărui punct material al sistemului:

$$\frac{d}{dt}\left(m_k \vec{v}_k\right) = \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k + \vec{F}_k . \qquad (4.46)$$

Prin însumare asupra tuturor punctelor materiale din sistem, obţinem:

$$\frac{d}{dt}\sum_k \vec{p}_k = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k + \sum_k \vec{F}_k = \sum_k \vec{F}_k = \vec{F} , \qquad (4.47)$$

deoarece, suma forţelor interne este nulă.



Teoremă. *Derivata în raport cu timpul a impulsului total $\vec{\mathrm{P}}$ al sistemului este egală cu rezultanta $\vec{\mathrm{F}}$ a forţelor externe aplicate sistemului.*

Dacă rezultanta forţelor externe este permanent nulă, impulsul total al sistemului se conservă. Sistemul nu-şi poate schimba impulsul total decât sub acţiunea unei forţe exterioare. Forţele interne pot doar redistribui impulsul între părţile componente ale sistemului. Sub formă integrală poţi scrie:

$$\vec{\mathrm{H}} = \int \vec{\mathrm{F}}\mathrm{dt} = \Delta\vec{\mathrm{P}}, \qquad (4.48)$$

analog teoremei impulsului pentru punctul material.
Poţi aplica ecuaţia fundamentală fiecărui punct material al sistemului:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_k \times \vec{p}_k\right) = \frac{d\vec{J}_k}{dt} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}_k + \vec{M}_k . \qquad (4.49)$$

Însumând după toate punctele sistemului rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sum_k \vec{J}_k = \dfrac{d\vec{J}}{dt} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}, \\ \vec{\mathrm{J}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_k \vec{J}_k \\ \vec{\mathrm{M}} = \sum_k \vec{M}_k \end{cases} \qquad (4.50)$$

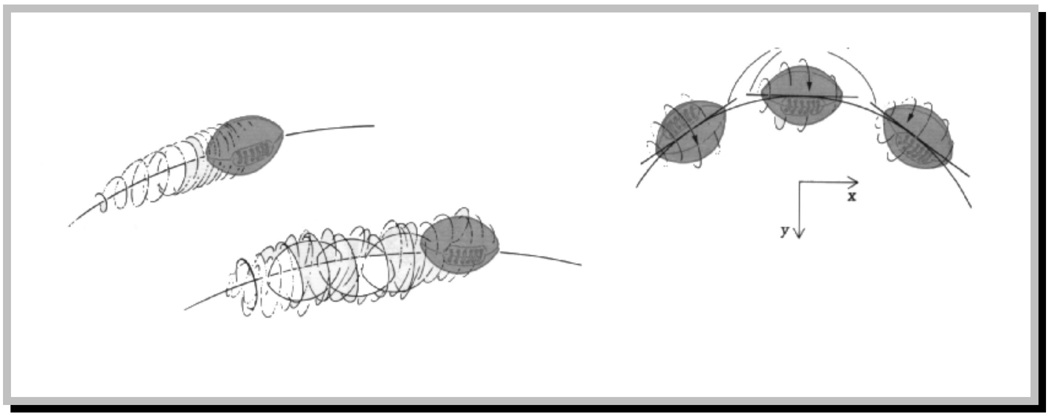
deoarece momentul forţelor interne este nul.

Teoremă.
Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total $\vec{\mathrm{J}}$ al sistemului faţă de un punct dat (pol) este egală cu momentul rezultant $\vec{\mathrm{M}}$ al forţelor externe faţă de acelaşi punct (pol).

Forţele interne pot doar redistribui momentul cinetic între particulele componente ale sistemului. Prin integrare se obţine:

$$\vec{K} = \int \vec{M}dt = \Delta\vec{J}, \qquad (4.51)$$

analog teoremei momentului cinetic pentru punctul material.



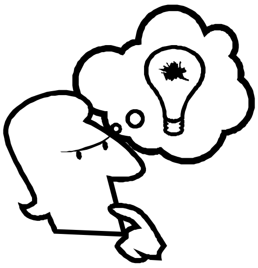


Figura 4.6 Mişcarea rotită a mingiei de rugbi pe traiectoria pe care este aruncată

Se poate scrie teorema energiei cinetice pentru fiecare punct material al sistemului:

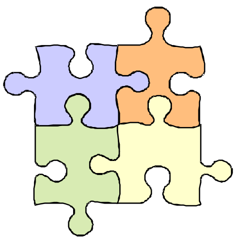
$$d\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = \left(\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k\right)d\vec{r}_k = d\mathcal{L}_k + dL_k \,. \qquad (4.52)$$

Însumând pentru toate punctele sistemului şi integrând, obţinem:

$$d\sum_k\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = \sum_k\left(\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k\right)d\vec{r}_k = \mathcal{L} + L\,,\ \Delta E_c = \mathcal{L} + L\,. \qquad (4.53)$$

> *Teoremă*
> Variaţia energiei cinetice totale a sistemului este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forţele, atât externe, cât ş interne.

În cazul solidului rigid, lucrul mecanic al forţelor interne este nul şi numai forţele externe pot schimba energia cinetică a sistemului.



Un alt caz important este acela când forţele interne sunt conservative, atunci se poate introduce energia potenţială a sistemului, funcţie numai de poziţiile tuturor punctelor materiale ale sistemului, adică funcţie numai de configuraţia sistemului:

$$\mathcal{L} = \sum_k \int \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_k \overset{def}{=} -\Delta U\,. \qquad (4.54)$$

Teorema energiei cinetice devine în acest caz:

$$\Delta E_c = -\Delta U + \sum_k \int \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_k = -\Delta U + L \Rightarrow \Delta\left(E_c + U\right) = L\,. \qquad (4.55)$$

Prin urmare, variaţia energiei mecanice, cinetice şi potenţiale, a unui sistem conservativ este egală cu lucrul mecanic al forţelor externe aplicate. De aici rezultă teorema conservării energiei mecanice (cinetice şi potenţiale a unui sistem conservativ izolat.

Se numeşte centru de masă a unui sistem mecanic punctul definit prin vectorul de poziţie:

$$\vec{r}_{CM} \overset{def}{=} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \text{, unde } m = \sum_{k=1}^{N} m_k \text{,} \qquad (4.56)$$

sau pentru o distribuţie continuă a masei:

$$\vec{r}_{CM} \overset{def}{=} \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm = \frac{1}{m}\int \vec{r}\rho\, dV \ . \qquad (4.57)$$

Dacă sistemul se descompune în părţi cu masa M_s şi cu centrele de masa $\vec{R}_{CMs}$, atunci grupând sumele pentru aceste părţi, rezultă:

$$\vec{r}_{CM} \overset{def}{=} \frac{1}{m}\sum_{s} M_s \vec{R}_{CMs} \text{, unde } m = \sum_{s} M_s \ . \qquad (4.58)$$

Centrul de masă (CM) este un anumit punct geometric asociat sistemului mecanic. În acest punct pot să nu existe particule sau masă distribuită, de exemplu cazul CM al unui inel sau a unei pături sferice. Derivând formula de mai sus obţii:

$$m\dot{\vec{r}}_{CM} = m\vec{v}_{CM} = \sum_{k} m_k \vec{v}_k = \sum_{k} \vec{p}_k = \vec{P} \ . \qquad (4.59)$$

Teoremă. Impulsul total $\vec{P}$ al sistemului este egal cu masa m a sistemului înmulţită cu viteza $\vec{v}_{CM}$ a centrului de masă, ca şi cum întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM şi s-ar mişca cu viteza acestuia.

C.M.

Acronim pentru

centru de masă

În raport cu un sistem de referinţă inerţial, centrul de masă al unui sistem izolat se mişcă rectiliniu uniform sau este în repaus. Aceasta este *legea inerţiei pentru un sistem.*
Derivând relaţia de definiţie a impulsului sistemului, obţii:

$$m\ddot{\vec{r}}_{CM} = m\dot{\vec{v}}_{CM} = m\vec{a}_{CM} = \dot{\vec{P}} = \vec{F} = \sum_{k} \vec{F}_k \ . \qquad (4.60)$$

Teoremă.
Rezultanta forţelor externe $\vec{F}$ este egală cu masa sistemului înmulţită cu acceleraţia *CM*.

CM al sistemului se mişcă ca un punct material cu masa egală cu masa sistemului şi asupra căruia se aplică rezultanta forţelor externe (teorema de mişcare a *CM*), ca şi cum toate forţele externe s-ar aplica

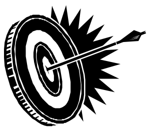
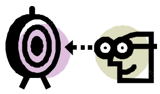
în CM ; întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în *CM* şi s-ar mişca cu acceleraţia acestuia. Forma integrală a enunţului este

$$\vec{H} = \int \vec{F} dt = m \Delta \vec{v}_{CM} \ . \qquad (4.61)$$

Impulsul forţelor externe este egal cu masa sistemului înmulţită cu variaţia vitezei centrului de masă, deci forţele interne nu pot schimba mişcarea CM. Un cuplu de forţe, oriunde ar fi aplicat, nu poate schimba mişcarea centrului de masă, ci doar roteşte corpul în jurul CM.

4.7 Test de autoevaluare 4.1

Răspunsurile la acest test le găseşti la pagina 91

1. Ce este centrul de masă?

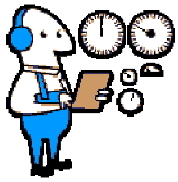
2. Care sunt cele trei teoreme ale mecanicii pentru puncte materiale?

3. Scrie teorema impulsului.

e este momentul cinetic?

5. Când se conservă momentul cinetic?

4.8 Ciocniri



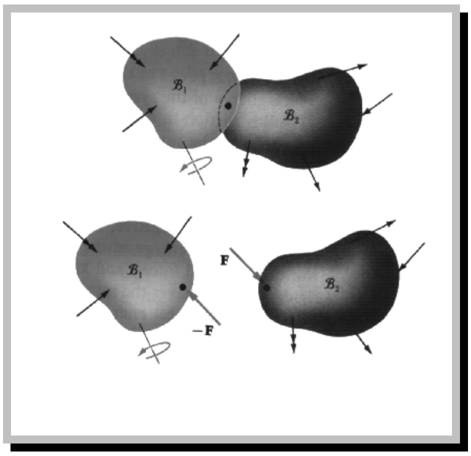


Figura 4.7 Ciocnire complexă între două solide rigide

Prin ciocnirea a două sau mai multe corpuri se înţelege, în general, un proces de interacţiune în care atât înainte cât şi după interacţiune corpurile se găsesc la distanţa mari unele faţă de altele, adică nu interacţionează, deci interacţiune durează un timp finit. Dacă în urma ciocnirii starea internă a fiecărui corp nu se schimbă, ciocnirea se numeşte elastică.

Vom considera ciocnirea corpurilor macroscopice. În momentul atingerii corpurile încep să se deformeze, viteza lor relativă se reduce la zero, energia cinetică relativă se transformă în energie de deformare şi în alte forme de energie. Ciocnirea este plastică

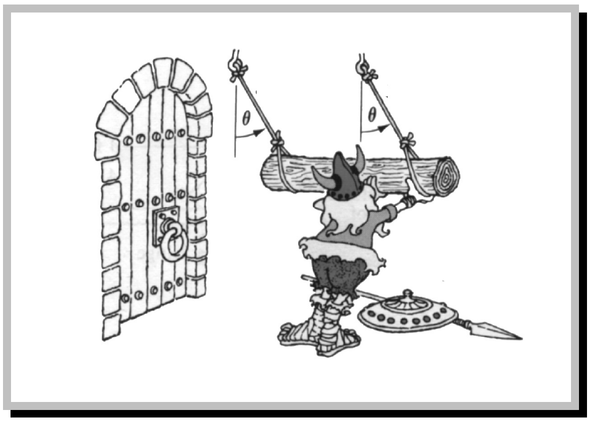


Figura 4.8 Berbecul de asediu este folosit pentru „deformarea" încuietorilor porţii

În ciocnirea elastică, în final, deformaţiile se anulează şi energia cinetică relativă se restituie integral, fără a se transforma în alte forme de energie.

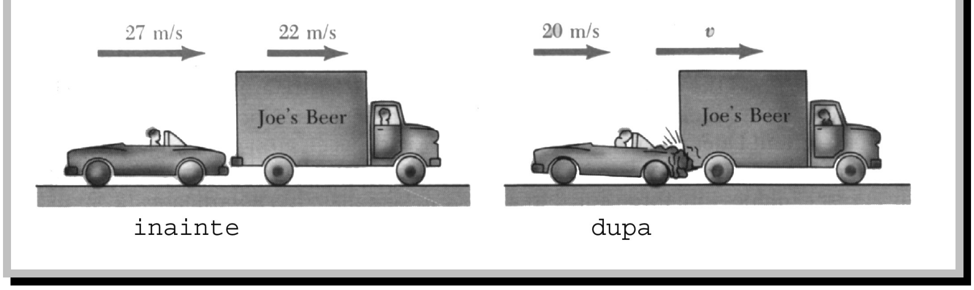


Figura 4.9 Ciocnire „aproape elastică", unidimensională a 2 maşini

***Peretele** este un corp plan cu masă mult mai mare decât masa obiectului care îl ciocneşte.*
Peretele unei clădiri este perete pentru o **minge de tenis** şi nu este perete pentru **bila imensă,** balansată cu macaraua a unei maşini de dărâmat case .

În ciocnirea total inelastică (plastică) corpurile se cuplează, formează un singur corp şi continuă mişcarea cu o viteză comună.

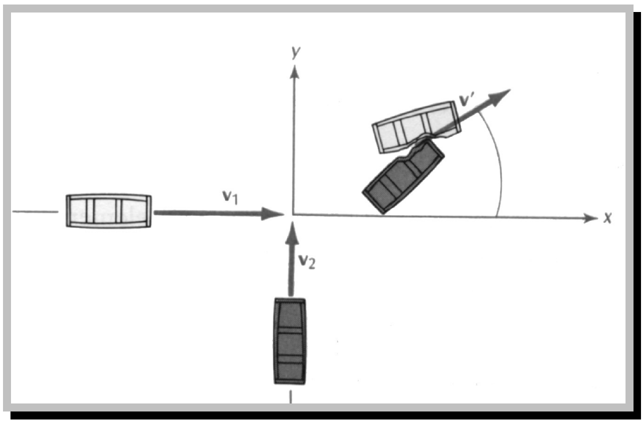


Figura 4.10 Ciocnire bidimensională , inelastică , a două maşini

Dacă faci descompunerea vitezei relative

$$\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad (4.62)$$

(a corpului 1 faţă de corpul 2) după linia de ciocnire, atunci ambele componente se schimbă în general prin ciocnire, deoarece corpurile nu sunt nici perfect elastice şi nici absolut rigide. Componenta vitezei relative, normală pe planul de contact, v_{rn}, îşi schimbă semnul prin ciocnire, deoarece înainte de ciocnire corpurile se apropiau unul de altul, iar după ciocnire se îndepărtează unul de altul. Componenta vitezei relative, v_{rt}, reprezintă viteza de alunecare a unui corp peste celălalt în momentul ciocnirii. Dacă linia de ciocnire trece în momentul ciocnirii prin centrele de masă ale celor două corpuri, ciocnirea se numeşte centrală. Dacă înainte de ciocnire corpurile se mişcă după linia de ciocnire (v_{rt}=0), ciocnirea se numeşte frontală, în caz contrar, oblică.

În procesul de ciocnire se exercită forţe de interacţiune între corpuri, deci forţe interne, care nu pot schimba impulsul total şi momentul cinetic total al sistemului. De aceea, impulsul total şi momentul cinetic total ale corpurilor care se ciocnesc, imediat înainte de ciocnire sunt egale cu impulsul total şi momentul cinetic total ale corpurilor imediat după ciocnire, adică impulsul total şi momentul cinetic total ale sistemului de corpuri care se ciocnesc se conservă în procesul ciocnirii. Pentru fiecare corp separat poţi scrie:

$$\begin{cases} \vec{P} = \sum\limits_s \vec{P}_s = m\Delta\vec{v}_{CM} \\ \vec{K} = \sum\limits_s \vec{r}_s \times \vec{P}_s = \Delta\vec{J} \end{cases} . \qquad (4.63)$$

În cazul ciocnirii total inelastice (plastice) a două corpuri, ele se cuplează astfel încât conservarea impulsului total dă:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}\,' \\ \vec{v}\,' = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} , \qquad (4.64)$$

unde $\vec{v}_{1,2}, \vec{v}'$ sunt vitezele centrelor de masă. Energia cinetică pierdută, adică transformată în alte forme de energie (căldură) va fi:

$$\begin{cases} -\Delta E_c = Q = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 \\ Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2}\mu v_r^2 \end{cases} \qquad (4.65)$$

unde

$$\begin{cases} \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \end{cases} \qquad (4.66)$$

sunt respectiv μ masa redusă a celor două corpuri şi $\vec{v}_r$ viteza relativă a corpului 1 faţă de corpul 2.

În cazul ciocnirii perfect elastice, pe lângă impulsul total se conservă şi energia cinetică totală. Considerând ciocnirea centrală şi frontală, corpurile înainte şi după ciocnire se mişcă în aceeaşi direcţie (cazul unidimensional) şi ai:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 \end{cases} \qquad (4.67)$$

un artificiu matematic care evită rezolvarea sistemului ca sistem de gradul al doilea, este de a muta tot ce este cu corpul unu în stânga şi corpul doi în dreapta egalului şi:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 + v'^2_1) = m_2(v'^2_2 + v_2^2) \end{cases} \qquad (4.68)$$

şi împărţind membru cu membru:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow v'_r = v'_1 - v'_2 = -v_r , \qquad (4.69)$$

adică viteza relativă îşi schimbă doar semnul.

Din sistemul de ecuaţii de mai sus rezultă:

$$\begin{cases} v'_1 = 2v' - v_1 \\ v'_2 = 2v' - v_2, \\ v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad (4.70)$$

În cazul ciocnirii perfect elastice centrale şi frontale cu un perete, adică un corp de masă foarte mare, $m_2 >> m_1$,

$$v'_1 = 2v_2 - v_1 \text{ si } v'_2 = v_2 \qquad (4.71)$$

În particular, pentru un perete în repaus, $v_2=0$ şi

$$v'_1 = -v_1 \text{ si } v'_2 = v_2 \qquad (4.72)$$

adică corpul 1 se întoarce cu aceeaşi viteza, în modul. În cazul ciocnirii perfect elastice oblice cu un perete în repaus, avem:

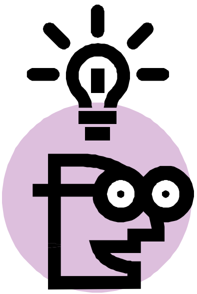
$$\left|\vec{v}'\right| = \left|\vec{v}\right| \tag{4.73}$$

adică viteza incidentă $\vec{v}$ şi viteza reflectată $\vec{v}'$ sunt în acelaşi plan cu normala şi unghiul de reflexie α' este egal cu unghiul de incidenţă α. Dacă notăm cu τ durata ciocnirii, atunci forţa medie exercitata de perete asupra particulei va fi:

$$\vec{f} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\tau} = \frac{m\vec{v}' - m\vec{v}}{\tau} \Rightarrow f = \frac{2mv\cos\alpha}{\tau}, \tag{4.74}$$

perpendiculară pe perete.

4.9 Sistem cu masă variabilă



Dacă într-un timp infinitezimal *dt* un corp câştigă sau pierde o cantitate infinitezimală de masă *dm*, forţele de alipire sau de expulzare sunt forţe interne şi nu pot schimba impulsul total al sistemului.

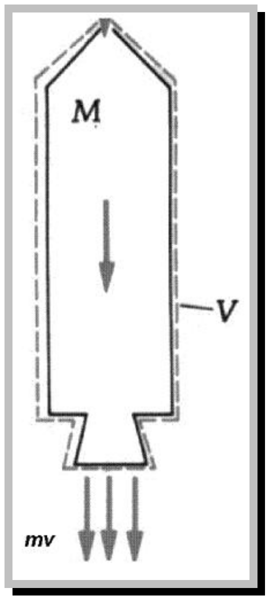


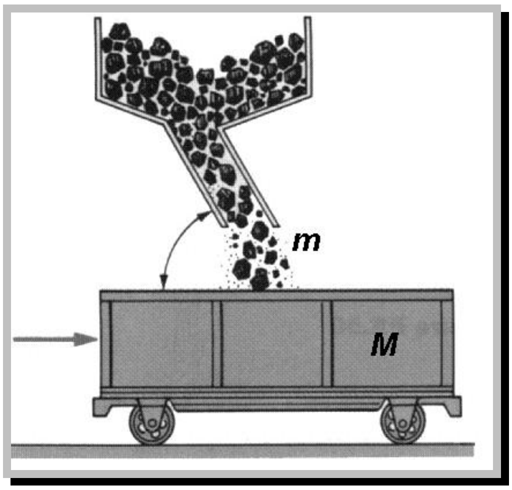
Figura 4.11 Racheta din figură are masa variabilă, în scădere. Impulsul gazelor ejectate determină forţa care propulsează racheta în sus

Notând cu $\vec{F}$ forţa externă asupra corpului de masă m, cu $\vec{v}$ viteza *CM* a acestuia şi cu $\vec{u}$ viteza masei *dm*, aplicând teorema impulsului total în cazul alipirii (*dm>0*), obţinem:

$$\vec{F}dt = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + \vec{u}dm) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}'\frac{dm}{dt}, \text{unde } \vec{v}' = \vec{u} - \vec{v}, \tag{4.75}$$

unde $\vec{v}'$ este viteza relativă faţă de corp a particulelor alipite. Termenul infinit mic de ordinul doi $dmd\vec{v}$ este neglijabil. Aceeaşi ecuaţie se obţine şi în cazul expulzării, dm<0:



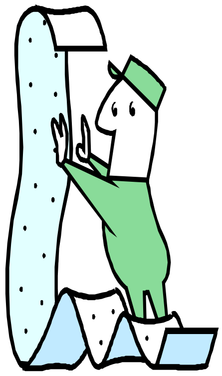
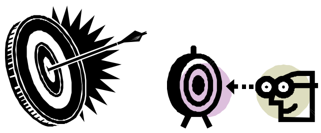


Figura 4.12Vagonul din figură are masa variabilă, în creştere. Variaţia componentei orizontale a impulsul materialului care curge în vagon determină o forţă care acţionează pe orizontală asupra acestuia.

$$\begin{cases} \vec{F}dt = (m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} - |dm|\vec{u}) \\ \vec{F}dt = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - \vec{u}dm - m\vec{v} \\ \vec{F} + \vec{u}\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} \Leftrightarrow \\ \vec{F} + \vec{v}'\dfrac{dm}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}, \\ \vec{v}' = \vec{u} - \vec{v} \end{cases} \qquad (4.76)$$

4.10 Test de autoevaluare 4.2

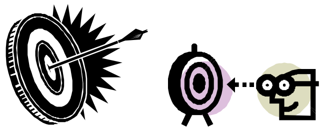
Răspunde la întrebările:



1. Prin ce se deosebeşte ciocnirea plastică de cea elastică?

2. Ce legi de conservare sunt valabile în cazul ciocnirii elastice?

3. Dar în cazul ciocnirii plastice?



Test de autoevaluare 4.2 – Continuare

4.Prin ce se caracterizează ciocnirea elastică cu un perete?

5.Cum este propulsat un avion cu reacţie sau o rachetă?

Răspunsurile le găseşti la pagina 92

4.11 Lucrare practică

1.

♦ Dintr-o planşetă sau o scândură sau– cel mai bine– dintr-o riglă transparentă mai lungă (50 cm) alcătuieşte un plan înclinat, rezemând capătul superior, pe un teanc de cărţi sau altfel.

♦ Lasă să alunece un corp mic, o gumă de pildă sau o monedă, şi cu un cronometru sau un ceas, determină timpul, momentele când trece prin dreptul unor anume diviziuni (în cazul că te-ai hotărât pentru o riglă).

♦ Este bine să repeţi experimentul de mai multe ori (10 ori) .

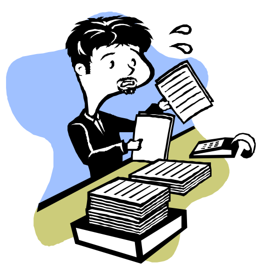
♦ Notează toate rezultatele măsurărilor

♦ Ştiind că mişcarea este uniform accelerată, determină acceleraţia Folosind rigla află şi valoarea atracţiei gravitaţionale

2.

♦ Reia experimentul precedent, dar modifică înclinarea planului, scoţând sau introducând cărţi. Poţi afla înclinarea planului cu un raportor mai mare sau măsurând cu o altă riglă catetele triunghiului dreptunghic şi calculând tangenta.

♦ Dacă determini durata alunecării şi ştii spaţiul, poţi afla acceleraţia dar şi viteza medie (spaţiul pe timp).



♦ Încearcă să confirmi formula care dă acceleraţia ca funcţie de înclinarea planului şi coeficientul de frecare.

♦ Cu puţină strădanie se poate calcula coeficientul de frecare din datele a cel puţin 2 înclinări.

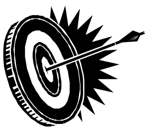
3.

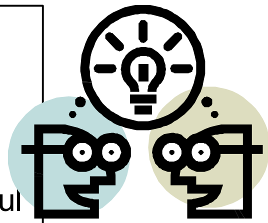
♦ Modifică înclinarea planului astfel încât guma sau mai bine moneda să alunece uniform (aprecierea uniformităţii mişcării este la latitudinea ta). Tangenta unghiului pentru care alunecarea este uniformă, este chiar egală cu coeficientul de frecare la alunecare. Acest unghi se mai numeşte ***unghi de frecare.***

♦ Determină astfel coeficientul de frecare pentru mai multe perechi de suprafeţe. Compară cu valorile obţinute prin altă metodă. Compară preciziile metodelor propuse.

♦ Întocmeşte un protocol al lucrării. Foloseşte un editor de texte şi descrie metodele alese. Tabelează rezultatele. Descrie prelucrările pe care le-ai făcut şi rezultatele pe care le-ai obţinut. Adaugă toate detaliile pe care le consideri importante.

4.12. Răspunsuri la testele de evaluare





Testul de autoevaluare 4.1 Răspunsuri

1. Se numeşte centru de masă a unui sistem mecanic punctul definit prin vectorul de poziţie:

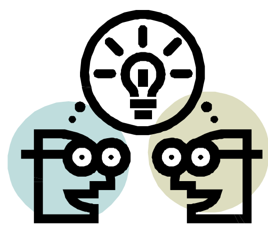
$$\vec{r}_{CM} \overset{def}{=} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \text{, unde } m = \sum_{k=1}^{N} m_k \text{ .}$$

2. Cele trei teoreme pentru puncte materiale sunt: teorema impulsului, teorema energiei cinetice şi teorema momentului cinetic.

3. Impulsul forţei rezultante aplicate punctului material este egal cu variaţia impulsului punctului material.

4. Momentul impulsului, numit moment cinetic: $\vec{J} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$, este o mărime fizică egală cu produsul vectorial dintre braţul impulsului (distanţa dintre centrul de rotaţie şi punctul de aplicaţie al vectorului impuls) şi impuls.

5. Momentul cinetic se conservă când momentul forţei aplicate este zero.



Testul de autoevaluare 4. 2 Răspunsuri

1. În timpul ciocnirii a două corpuri ele se deformează. La ciocnirea elastică deformarea dispare după ce procesul de interacţiune (ciocnirea) încetează, la ciocnirea plastică deformarea nu dispare.

2. La ciocnirea elastică se conservă şi energia cinetică şi impulsul.

3. La ciocnirea plastică se conservă numai impulsul, variaţia energiei cinetice fiind egală cu lucrul mecanic de deformare a celor două corpuri.

4. La ciocnirea elastică cu un perete modulul vitezei corpului după ciocnire este egal cu modulul vitezei înainte de ciocnire, iar unghiul dintre direcţia vitezei incidente şi direcţia normală la perete este egal cu unghiul dintre direcţia vitezei după ciocnire şi direcţia normală la perete.

5. Un avion cu reacţie sau o rachetă reprezintă un sistem cu masă variabilă. Prin expulzarea gazelor de ardere a combustibilului cu viteză extrem de mare şi datorită conservării impulsului total al sistemului, avionul este propulsat în direcţie opusă direcţiei de expulzare.

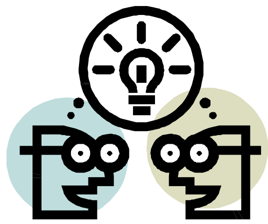
4.13 Termeni şi expresii cheie. Formule cheie

Termeni şi expresii cheie

- **Impulsul forţei;**
- **Forţe interne; forţe externe;**
- **Energie cinetică; energie potenţială;**
- **Momentul forţei în raport cu un pol; momentul cinetic;**
- **Centrul de masă al unui sistem de particule;**
- **Ciocniri plastice ;ciocniri perfect elastice;**

Teoreme şi legi cheie

- **Teorema de variaţie a impulsului pentru un punct material şi pentru un sistem de puncte materiale;**
- **Legea conservării impulsului;**
- **Teorema de variaţie a energiei cinetice pentru un punct material şi pentru un sistem de puncte materiale;**
- **Legea conservării energiei mecanice;**
- **Teorema de variaţie a momentului cinetic pentru un punct material şi pentru un sistem de puncte materiale;**
- **Legea conservării momentului cinetic;**



Formule cheie

- **Expresia matematică a teoremei de variaţie a impulsului unui punct material**

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1;$$

- **Expresia matematică a teoremei de variaţie a momentului cinetic al unui punct material**

$$\vec{K} \overset{def}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int \vec{r} \times d\vec{H} = \vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \Delta\vec{J}$$

- **Expresia matematică a teoremei de variaţie a energiei cinetice a unui punct material**

$$L = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \Delta E_c = E_{c1} - E_{c2}$$

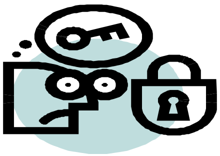
- **Expresia matematică a vectorului de poziţie a centrului de masă**

$$\vec{r}_{CM} \overset{def}{=} \frac{1}{m}\int \vec{r} dm = \frac{1}{m}\int \vec{r}\rho dV$$

- **Expresia matematică a căldurii degajate într-o ciocnire plastică**

$$Q = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2}\mu \cdot v_r^2$$

4.14. Lucrare de verificare 4

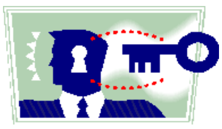


1. Găseşte poziţiile centrelor de masă pentru con, emisferă şi placă semicirculară. *(3 puncte)*
2. Găseşte momentul de inerţie al unui cilindru faţă de axa proprie şi faţă de o generatoare *(2 puncte)*
3. Explică de ce creşte viteza de rotaţie a patinatorilor când îşi strâng mâinile pe lângă corp *(1 punct)*

4 Răspunde la cele trei cerinţe ale lucrării de laborator. Redactează protocolul şi adaugă-l lucrării. *(3 puncte)*

Notă: Se va acorda un punct din oficiu *Total 10 puncte*

4.15 Bibliografie

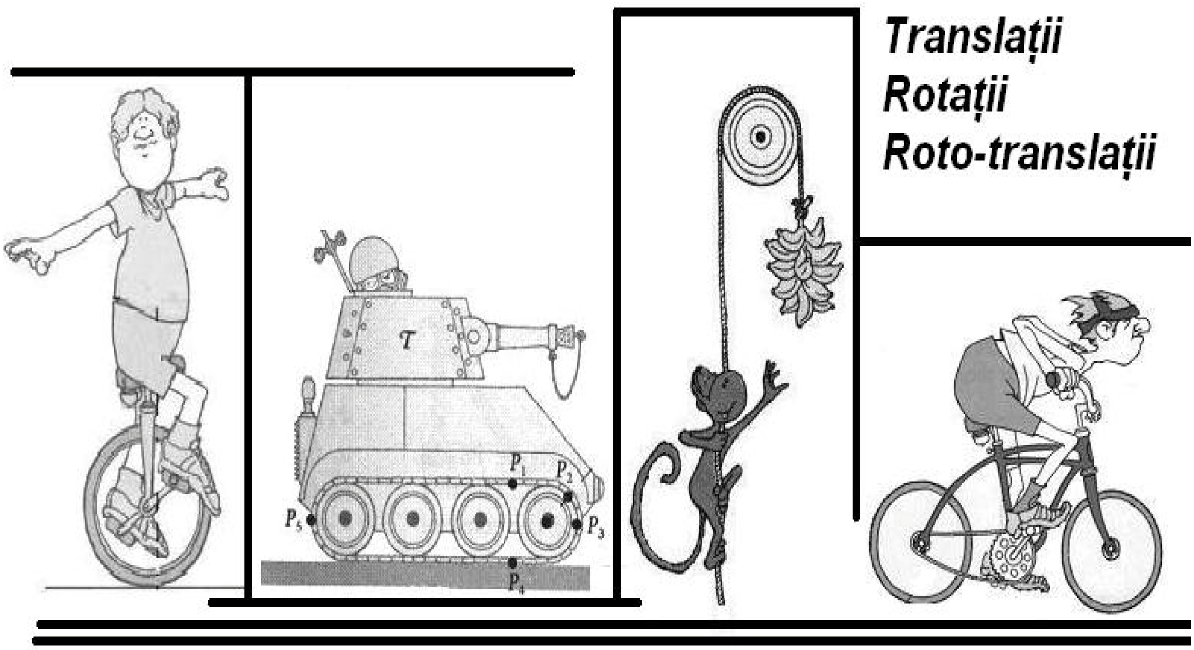


1.A. P. Hristev, Curs de Mecanică Fizică şi Acustică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 (paginaţia corespunde ediţiei a II-a), pag. 145-157
2. A. P. Hristev, V. Fălie, D. Manda, Fizica, Manual pentru clasa a IX-a, Ed. Pedagogică, Bucureşti, 1979, 1981, 1984, pag. 101-148
3.***, Probleme de Fizică pentru clasele IX-X, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1983, pag. 13-25, 27-30, 35-51

Unitatea de învăţare 5

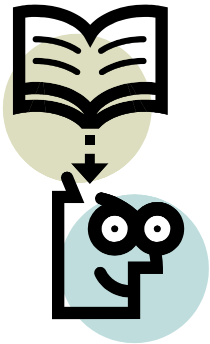
SOLIDUL RIGID

Cuprins **Pagina**



- *Bicicliştii, militarul, maimuţa şi bananele se translatează liniar*
- *Scripetele maimuţei se roteşte*
- *Roţile bicicletelor şi cele ale tancului se rototranslează în plan paralel*
- *Gândeşte-te la mişcarea punctelor de pe şenila tancului. Compară mişcarea şenilei cu mişcarea lanţului bicicletei. Găseşte asemănări şi deosebiri*

5.1 Obiectivele unităţii de învăţare 5



Când vei termina de studiat acest capitol vei fi capabil :

- *Să identifici un solid rigid şi tipul mişcării sale*
- *Să descrii cu termenii potriviţi mişcarea plan paralelă şi de alte tipuri a solidului rigid*
- *Să defineşti şi să calculezi momente de inerţie faţă de diferite axe de rotaţie*
- *Să înţelegi care este efectul rezultantei forţelor asupra unui corp rigid*
- *Să înţelegi care este efectul momentului rezultant asupra unui corp rigid*
- *Să utilizezi viteza şi acceleraţia unghiulară pentru descrierea mişcării soldului rigi*
- *Să determini energia cinetică a unui corp solid*

5.2 Mişcarea plan-paralelă

În această mişcare traiectoriile punctelor solidului sunt paralele cu un plan fix. Toate punctele solidului situate pe o normală la acel plan se mişcă identic. De aceea ***mişcarea plan-paralelă se reduce la mişcarea unei figuri plane în planul său***. Condiţia suficientă pentru ca solidul rigid să aibă o mişcare plan paralelă este ca trei puncte necoliniare care-i aparţin să rămână într-un plan fix în tot timpul mişcării. Vectorii $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ sunt conţinuţi în planul figurii *(OXY),* iar vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$ sunt perpendiculari pe plan. Dacă alegi axa de rotaţie pe direcţia *Oz* $\omega_z=\omega$, $\varepsilon_z=\varepsilon$., o convenţie firească este ca $\omega>0$ să însemne rotaţia în sens trigonometric. Un sistem mobil solidar cu solidul rigid, foarte convenabil este cel care are originea din *O'* şi axele *O'X'* şi *O'Y'* conţinute tot timpul în planul XOY (Figura 5.1).Dacă vectorul de poziţie al originii sistemului mobil este

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \qquad (5.1)$$

cunoaşterea mişcării corpului revine la cunoaşterea dependenţelor temporale

$$\begin{cases} x_0 = x_0(t) \\ y_0 = y_0(t) \\ z_0 = z_0(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \qquad (5.2)$$

Deoarece direcţia *O'Z'* rămâne tot timpul perpendiculară pe planul *O'X'Y'*, vectorii viteză şi acceleraţie ai centrului sistemului mobil faţă de sistemul fix sunt conţinuţi în planul *O'X'Y'* iar viteza unghiulară $\vec{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon}$ au direcţia *OZ* Prin urmare

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0 = \dot{x}_0\vec{i} + \dot{y}_0\vec{j} \\ \vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}_0 = \ddot{x}_0\vec{i} + \ddot{y}_0\vec{j} \\ \vec{\omega} = \dot{\theta}\cdot\vec{k} \\ \vec{\varepsilon} = \ddot{\theta}\cdot\vec{k} \end{cases} \qquad (5.3)$$

în sistemul fix şi respectiv

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i}\,' + v_{0y}\vec{j}\,' \\ \vec{a}_0 = a_{0x}\vec{i}\,' + a_{0y}\vec{j}\,' \\ \vec{\omega} = \dot{\theta}\cdot\vec{k}\,' \\ \vec{\varepsilon} = \ddot{\theta}\cdot\vec{k}\,' \end{cases} \qquad (5.4)$$

în sistemul mobil.

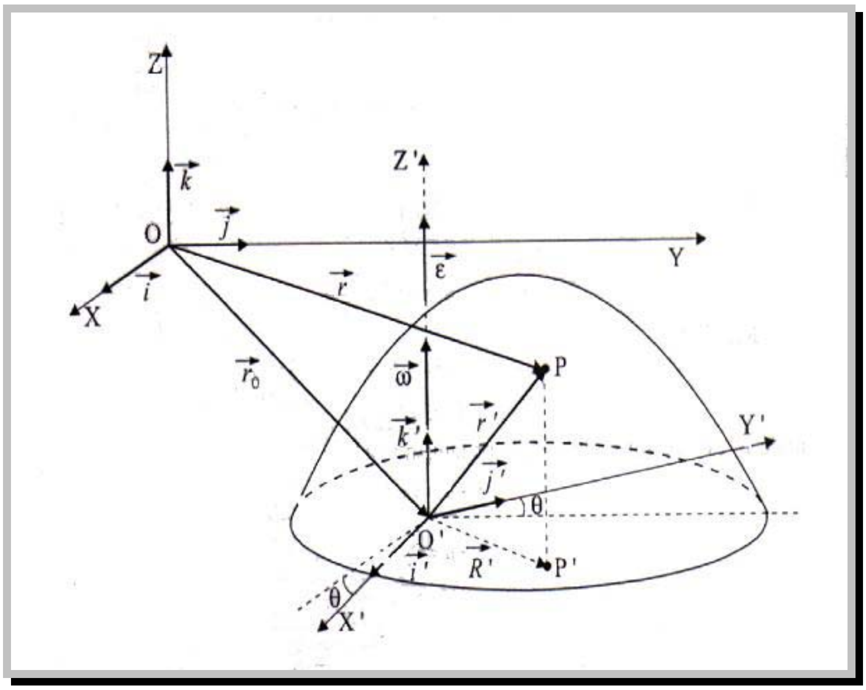


Figura 5.1

Pentru punctul oarecare al corpului rigid notat cu *P*, al cărui vector de poziţie în sistemul mobil este

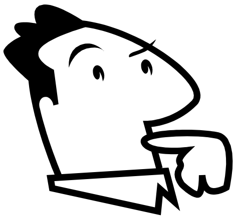
$$\vec{r}\,' = \vec{R}' + \overrightarrow{PP'} \qquad (5.5)$$

se pot scrie - folosind notaţiile din figură – relaţiile

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t) \qquad (5.6)$$

Deoarece $\overrightarrow{PP'} \perp XOY$ rezultă că mişcarea punctului *P'* este identică mişcării punctului *P.* Viteza lui este

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{R}' \qquad (5.7)$$



Din analiza situaţiei alese, rezultă câteva observaţii.

- Există puncte aparţinând corpului ale căror viteze instantanee sunt nule. Aceste puncte se află pe o dreaptă paralelă cu OZ . Această dreaptă se numeşte axă instantanee de rotaţie
- Distribuţia vitezelor punctelor corpului aflat în mişcare plan-paralelă este identică distribuţiei vitezelor de rotaţie în jurul axei instantanee de rotaţie
- Punctul în care axa instantanee de rotaţie înţeapă planul $X'O'Y'$ se numeşte centru instantaneu de rotaţie.

Relaţia (5.7) se poate rescrie sub forma

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{5.8}$$

din derivarea căreia rezultă acceleraţia punctului solidului rigid în mişcare plan paralelă sub forma

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) \tag{5.9}$$

Pot exista puncte pentru care acceleraţiile instantanee în raport cu sistemul fix sunt nule. Aceste puncte sunt situate pe o dreaptă paralelă cu OZ . Punctul în care această axă înţeapă planul XOY este numit polul acceleraţiilor.

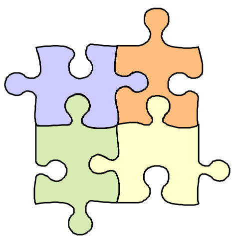
5.3 Mişcarea elicoidală

În fiecare moment mişcarea solidului rigid se descompune într-o rotaţie infinitezimală în jurul unei axe instantanee şi o translaţie infinitezimală de-a lungul acestei axe. (mişcare elicoidală instantanee).

Componenta translaţiei, conţinută în planul perpendicular pe axă, poate fi desfiinţată, mutând axa convenabil într-un punct C numit centru instantaneu de rotaţie (în sistemul fix) sau centrul vitezelor (în sistemul mobil).

Vectorul de poziţie sau coordonatele centrului instantaneu C sunt date de:

$$\begin{cases} \vec{r}_c = \vec{r}_0 + \dfrac{1}{\omega^2}\vec{\omega} \times \vec{v}_0 \\ \vec{r}'_c = \dfrac{1}{\omega^2}\vec{\omega} \times \vec{v}_0 \end{cases}, \tag{5.10}$$



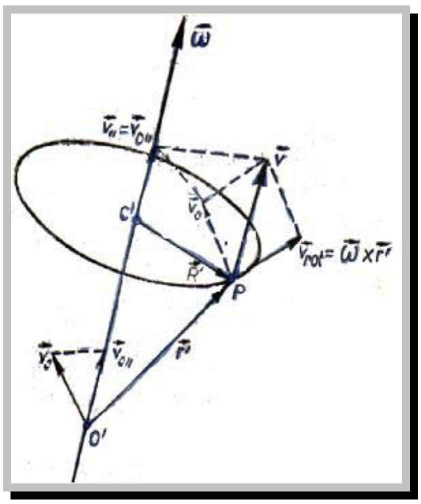
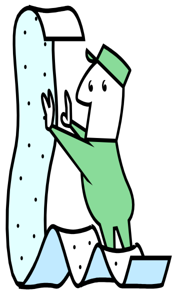


Figura 5.2



deoarece viteza acestui punct $\vec{v}_c$, în cazul mişcării plane, este nulă ($\vec{\omega}\cdot\vec{v}_0 = 0$). Luând pe C drept pol, ai

$$\vec{v}_{rot} = \vec{\omega}\times\vec{r}\,' \;\; (\vec{r}\,' = \overrightarrow{CP}), \tag{5.11}$$

adică vitezele tuturor punctelor figurii sunt în fiecare moment perpendiculare pe razele care le unesc cu centrul instantaneu C şi au modulul $\omega r' = \omega CP$, ceea ce corespunde rotaţiei momentane a figurii în jurul centrului *C* cu viteza unghiulară ω.
Formula acceleraţiilor devine în cazul plan:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,' - \omega^2\vec{r}\,', \tag{5.12}$$

unde $\vec{\omega}$ si $\vec{\varepsilon}$ sunt perpendiculari pe plan, deci $\vec{a}_\varepsilon$ este perpendicular pe $\vec{r}\,'$, iar $\vec{a}_\omega$ este centripet către pol. În fiecare moment acceleraţia oricărui punct este egală cu acceleraţia polului ales arbitrar ($\vec{a}_0$) plus acceleraţia datorita rotaţiei momentane în jurul polului

$$\vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_{t'} + \vec{a}_{n'}. \tag{5.13}$$

Există în fiecare moment un punct *W* a cărui acceleraţie este nulă în acel moment, numit centrul acceleraţiilor. Din relaţia de mai sus rezultă pentru acest punct:

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a}_0 = -\vec{a}_\varepsilon - \vec{a}_\omega \Rightarrow \left|\vec{a}_0\right| = \left|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,' - \omega^2\vec{r}\,'\right| = r'\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'_w = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} \text{ si } \operatorname{tg}\beta = \frac{a_\varepsilon}{a_\omega} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \Rightarrow \vec{r}\,'_w = \frac{\omega^2\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{a}_0}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}. \tag{5.14}$$

În cazul rostogolirii uniforme *(ε=0)* centrul acceleraţiilor se numeşte centrul geometric al acceleraţiilor *(G).* Cele două centre, ale vitezelor şi acceleraţiilor sunt distincte *(C$\neq$W).*

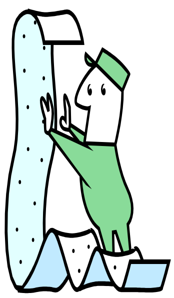
5.4 Dinamica solidului rigid

Mişcarea solidului rigid se descompune într-o mişcare de translaţie şi o mişcare de rotaţie în jurul unei axe momentane:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'. \tag{5.15}$$

Dinamica mişcării de translaţie coincide cu dinamica punctului material. Vei studia dinamica mişcării de rotaţie.

5.4.1 Energia cinetică de rotaţie



Alegând un sistem de coordonate cu originea O pe axa de rotaţie, calculăm energia cinetică de rotaţie a rigidului, ca suma energiilor cinetice ale părţilor:

$$E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{rotk}^2 \Leftrightarrow E_{rot} = \int \frac{1}{2} v_{rot}^2 dm. \tag{5.16}$$

Ţinând seama că vitezele particulelor sunt:

$$\begin{cases} \vec{v}_{rotk} = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{\omega} \times \vec{R}_k \\ v_{rotk} = \omega R_k \Leftrightarrow v_{rot} = \omega R \end{cases}, \qquad (5.17)$$

unde $\vec{r}_k$ sunt vectorii de poziţie şi R_k distanţele particulelor m_k până la axa de rotaţie, obţinem:

$$E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k R_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 , \qquad (5.18)$$

unde

$$I \overset{def}{=} \sum_k m_k R_k^2 \qquad (5.19)$$

este momentul de inerţie al rigidului faţă de axa de rotaţie.

În cazul distribuţiei continue de masă, suma de mai sus se înlocuieşte cu integrala (integrală de volum):

$$I \overset{def}{=} \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV, (dm = \rho dV), \qquad (5.20)$$

unde R este distanţa elementului de masă dm până la axa de rotaţie.

5.4.2 Momentul de inerţie

Momentul de inerţie este o mărime aditivă în sensul că este egală cu suma momentelor de inerţie ale particulelor/părţilor componente ale corpului. Momentul de inerţie al unui punct material faţă de o axă este egal cu produsul dintre masa punctului material şi pătratul distanţei sale până la axa: mR^2:

$$I_k = m_k R_k^2 \Rightarrow I = \sum_k I_k . \qquad (5.21)$$

Pentru a obţine un moment de inerţie cât mai mare pentru aceeaşi masă, aceasta trebuie distribuită la distanţă cât mai mare faţă de axă, de exemplu momentul de inerţie al unui cilindru gol este mai mare decât momentul de inerţie al unui cilindru plin, cu aceeaşi masă.
Se numeşte raza de inerţie sau de giraţie faţă de o axă, distanţa R, definită conform relaţiilor de mai jos (pentru o configuraţie discretă de puncte materiale şi respectiv pentru o distribuţie continuă)

$$\begin{cases} I = \sum_k m_k R_k^2 = m R_g^2, (\mathrm{m} = \sum_\mathrm{k} \mathrm{m_k}) \\ I = \int R^2 dm = m R_g^2 \end{cases} \qquad (5.22)$$

$$\begin{cases} R_g^2 = \dfrac{1}{m} \sum_k m_k R_k^2 \\ R_g^2 = \dfrac{1}{m} \int R^2 dm \\ R_g \overset{def}{=} \sqrt{\dfrac{I}{m}} \end{cases} \qquad (5.23)$$

adică raza de inerţie R_g este distanţa de la axa dată unde ar trebui concentrată, aşezată, toată masa corpului pentru a da acelaşi moment de inerţie faţă de acea axă.

Dacă cunoaştem masele părţilor componente M_j şi razele lor de giraţie r_{gj} faţă de o axă, atunci momentul de inerţie al corpului faţă de acea axă este:

$$I = \sum_j I_j = \sum_j M_j r_{gj}^2 \, . \qquad (5.24)$$

Dimensiunile momentului de inerţie sunt:
$[I] = [m][R^2] = kgm^2$ in SI .

.
Aşa cum pentru mişcarea de translaţie masa unei corp este măsura inerţiei sale, momentul de inerţie faţă de o axă este măsura inerţiei corpului în mişcarea de rotaţie în jurul acelei axe.

Momentul de inerţie al unui corp depinde de axa faţă de care se calculează, de aceea momentul de inerţie faţă de un sistem de coordonate este un tensor. Pentru a calcula momentele de inerţie faţă de un sistem de coordonate cu originea pe axa de rotaţie, să deducem expresia analitică a energiei cinetice de rotaţie faţă de acest sistem de coordonate. Pentru distribuţia discretă respectiv continuă ale masei

$$\begin{cases} E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{rotk}^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_k\right)^2 \\ E_{rot} = \int \frac{1}{2} v_{rot}^2 dm = \int \frac{1}{2} \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2 dm \end{cases} . \qquad (5.25)$$

5.5 Problemă rezolvată

Doi cilindri – iniţial în contact – din acelaşi material, plini, omogeni, cu aceleaşi dimensiuni dar cu o prelucrare a suprafeţelor diferită, se pot rostogoli pe un plan înclinat. Studiază mişcarea celor doi cilindri. Vei nota cu α unghiul de înclinare al planului.

1. Un prim caz, banal pentru problemele celor doi cilindri, dar existent pentru rezolvarea completă, este acela când cilindrul din faţă, cilindrul aflat mai jos, se rostogoleşte mai repede (decât celălalt).

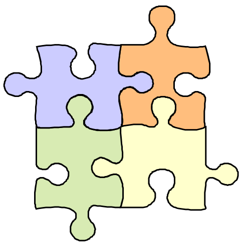
2. Poate că, înainte chiar de studiul mişcării s-ar putea pune problema unei posibile poziţii (sau condiţii) de echilibru, care, dacă este evident că nu se poate realiza în cazul unui singur cilindru, nu mai este atât de evident imposibilă în problema cu doi cilindri. În sprijinul acestei abordări se poate aduce imaginea a două rotiţe dinţate, angrenate şi aflate pe o cremalieră (şină dinţată), înclinată - modelare care poate duce cu gândul la existenţa unei poziţii de echilibru.

3. O altă discuţie va trebui făcută în legătură cu alunecarea, rostogolirea fără alunecare respectiv rostogolirea cu alunecare a celor doi cilindri, separat sau în tandem.

4. În sfârşit, trebuie să-ţi pui problema mărimilor fizice care ar caracteriza răspunsul la întrebarea, cum se mişcă cilindri? În mod sigur, fiind vorba de o rostogolire, deci rotaţie şi translaţie, trebuie să afli acceleraţiile celor doi cilindri şi acceleraţiile lor unghiulare. Alte mărimi interesante se vor contura, poate, pe parcursul rezolvării.

În continuare va trebui să examinezi cazurile în care cei doi cilindri se mişcă în contact, cu toate variantele care se întrevăd deja, respectiv amândoi nu alunecă, unul alunecă iar celălalt nu şi în sfârşit cazul când alunecă amândoi. Am considerat că-ţi este cunoscută rezolvarea unor probleme de rostogolire cu şi fără alunecare
Deoarece problema presupune mai multe cazuri - neenunţate explicit - este necesar să fie alcătuit un plan al abordării situaţiilor previzibile de la început, urmând ca alte cazuri care se conturează pe parcursul rezolvării să fie examinate ulterior. Deoarece prelucrarea mecanică, desigur, a suprafeţelor laterale - căci numai acestea intervin în decursul rostogolirii, este diferită vom avea trei coeficienţi de frecare diferiţi: pentru frecarea dintre fiecare cilindru şi planul înclinat respectiv pentru frecarea dintre cilindri.
De ce atât de multe precauţii ? Pentru că problema are câteva variante de evoluţie a mişcărilor cilindrilor şi este preferabil să le luăm în seamă **întâi gândind şi apoi muncind**.

Pentru început rezolvă cazul mişcării separate a celor doi cilindri, adică de două or mişcarea unui cilindru pe un plan înclinat - în aşezarea unei posibile rostogoliri, după cum precizează enunţul. (Nu exagerăm cu analiza dincolo de menţiunile enunţului, nefiind nici necesar şi nici eficient).



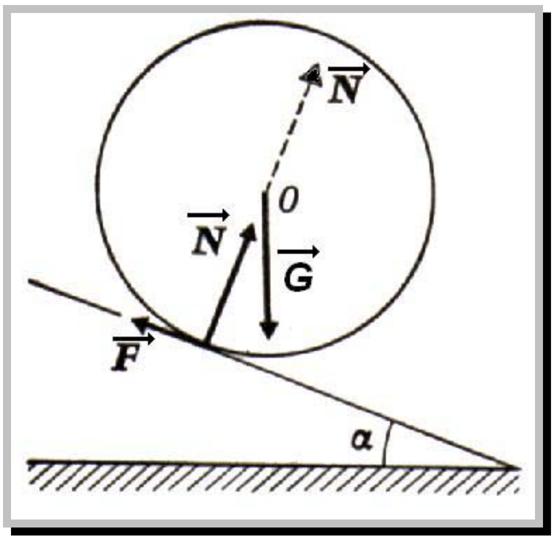


Figura 5.3

Cei doi cilindri se deplasează separat. Pentru fiecare este corectă o reprezentare de tipul celei prezentate în Figura5.3. În acest caz este deci suficient să studiezi mişcarea unui singur cilindru. Deoarece este o

mişcare de translaţie şi de rotaţie simultană, vei aplica prima teoremă a lui Euler pentru mişcarea rigidului conform căreia acceleraţia centrului de masă a corpului (rigid sau nu - dar şi a unui sistem de puncte materiale ori de puncte materiale şi corpuri) este dată de suma vectorială a forţelor externe. După cum se ştie suma vectorială a forţelor interne este nulă.
Cea de a doua teoremă Euler, restrânsă la mişcarea de roto-translaţie a unui rigid, respectiv a unui corp al cărui moment de inerţie nu se schimbă în timpul acestei mişcări, mişcare denumită şi mişcare plan-paralelă, ne dă acceleraţia unghiulară - a rigidului – care , multiplicată cu momentul de inerţie este egală cu suma momentelor forţelor externe. Suma vectorială a momentelor forţelor interne este, de asemenea, zero.

Factorul de proporţionalitate, în prima teoremă, este masa corpului sau a sistemului. Era necesar să insistăm asupra cărei acceleraţii se aplică teorema, deoarece un corp în rotaţie are mai multe acceleraţii (un câmp, vectorial, al acceleraţiilor). În cea de a doua teoremă, pentru rigid, factorul de proporţionalitate este momentul de inerţie, *I*, al corpului. În acest caz, acceleraţia unghiulară este un invariant al mişcării, adică avem o singură valoare pentru tot corpul. Viteza unghiulară ω,este, de asemenea, un invariant. În schimb, să remarcăm, că atât momentele forţelor cât şi momentul de inerţie depind de punctul (polul) respectiv prin care trece axa faţă de care sunt calculate. Pentru a evita alte teoreme şi pentru că nu există un câştig major în evoluţia calculelor, vom prefera să luăm ca referinţă centrul de masă şi axa care trece prin centrul de masă.

Deci, produsul dintre masă şi acceleraţia centrului de masă este dat de rezultanta forţelor iar produsul dintre momentul de inerţie şi acceleraţia unghiulară este egal cu momentul rezultant.

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_{CM} \\ \vec{F}_{REZ} = m \cdot \vec{a}_{CM} \end{cases} \qquad (5.26)$$

şi

$$\begin{cases} \sum \vec{M}_i = I \cdot \vec{\varepsilon} \\ \vec{M}_{REZ} = I \cdot \vec{\varepsilon} \end{cases} \qquad (5.27)$$

De asemenea

$$\vec{a}_{\tan g} = \vec{a}_{CM} = R \cdot \vec{\varepsilon} \qquad (5.28)$$

Presupunerea noastră implicită - prin relaţia dintre acceleraţia centrului de masă şi acceleraţia tangenţială, dar şi indirect, prin relaţia cu acceleraţia unghiulară - a fost că nu avem alunecare sau altfel spus, cilindrul înaintează pe măsură ce se rostogoleşte, întocmai ca o roată dinţată pe o şină dinţată (pe o cremalieră). Acest tip de abordare implică, prin inexistenţa oricărei alunecări, că nici forţa de frecare introdusă nu este produsă de o frecare de alunecare. Dacă facem apel, din nou, la imaginea cu roata dinţată - pe cremalieră - simţim că totul este ca şi cum roata se propteşte în dinţii (în asperităţile suprafeţei) cremalierei, care împing roata (cilindrul). Această forţă este deseori

numită ***impropriu*** dar sugestiv, **frecare statică** şi o regăsim ca forţă de tracţiune la propulsarea vehiculelor cu roţi. De fapt nu este decât banala reacţiune definită de legea a treia a dinamicii. Dar pentru ca această forţă să nu devină forţa de frecare la alunecare este necesar să fie mai mică decât μN, valoarea forţei de frecare la alunecare. Condiţia aceasta implică, în cazul cilindrului pe plan înclinat,

$$G\sin\alpha - F_1 = G\cdot\sin\alpha - \mu_1\cdot N_1 = m\cdot a_{cm} \qquad (5.29)$$

şi

$$R\cdot F_1 = I\cdot\varepsilon \qquad (5.30)$$

dar

$$\varepsilon = \frac{\mu_1\cdot R\cdot N_1}{I} \qquad (5.31)$$

şi deci

$$\begin{cases} a_{CM} = \dfrac{2g\sin\alpha}{3} \\ \varepsilon = \dfrac{2g\sin\alpha}{3R} \end{cases} \qquad (5.32)$$

Cum

$$\begin{cases} F_1 = \mu_1 mg\cos\alpha \\ F_1 = \dfrac{1}{3}mg\sin\alpha \end{cases} \qquad (5.33)$$

îţi rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\sin\alpha \geq \mu_1\cos\alpha \\ tg\alpha \geq 3\mu_1 \end{cases} \qquad (5.34)$$

sau altfel spus, trebuie să nu existe o înclinare prea mare a planului. În caz contrar, rostogolirea nu mai este solidară cu înaintarea şi apare o alunecare. Pentru unghiul de alunecare $tg\alpha = \mu$,)5.32) se rescrie

$$\begin{cases} a_{0,\max} = \dfrac{2g\cdot tg\alpha}{3\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{2g\cdot\mu_1}{3\sqrt{1+\mu_1^2}} \\ \varepsilon_{0,\max} = \dfrac{2g\cdot tg\alpha}{3R\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{2g\cdot\mu_1}{3R\sqrt{1+\mu_1^2}} \\ F_{1\,0,\max,(alunecare)} = \dfrac{2m\cdot g\cdot tg\alpha}{3\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{2m\cdot g\cdot\mu_1}{3\sqrt{1+\mu_1^2}} \end{cases} \qquad (5.35)$$

Depăşind cadrul problemei pe care o rezolvăm, putem imagina situaţiile în care cilindrul se poate roti mai repede decât înaintează - este cazul roţilor de maşină iarna pe gheaţă, sau se poate roti mai lent ori deloc - cum se petrece la o frânare prea bruscă, atunci când un automobil patinează.

Dacă în cazul nealunecării forţa de frecare este o necunoscută, inclusiv sensul ei, la alunecare sensul forţei de frecare este opus mişcării relative a celor două suprafeţe în contact. În acelaşi timp valoarea forţei este dată de relaţia lui Coulomb (Amonton): $F = \mu_x N$. Această relaţie este necesară, deoarece s-a pierdut o ecuaţie, aceea care stabilea legătura dintre acceleraţia tangenţială şi acceleraţia unghiulară. În acest fel în locul necunoscutei F apare accelera ia unghiulară, celelalte relaţii rămânând practic aceleaşi.

Este important să verificăm dacă sensul forţei de frecare a fost bine propus, chiar dacă în acest caz nu există prea mari îndoieli. Ne mai propunem să vedem valoarea raportului dintre acceleraţia liniară şi cea unghiulară, raport care ne va spune cine alunecă mai repede. De asemeni vom calcula valorile (maxime ale) necunoscutelor, la limita trecerii în alunecare. Ceea ce confirmă sensul forţei de frecare. O relaţie $R\varepsilon > a$, ar fi însemnat o rotaţie rapidă, “în loc“, cu frecarea spre înainte.

$$\frac{a}{R} = \frac{\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha}{2\mu_1 \cos\alpha} = \frac{tg\alpha}{2\mu_1} - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \qquad (5.36)$$

Deoarece acceleraţia centrului de masă este mai mare decât acceleraţia tangenţială (ωR) rezultă clar sensul forţei de frecare –şi anume spre în sus, adică cilindrul alunecă la vale, mai mult decât se rostogoleşte, ceea ce era oarecum previzibil deoarece odată cu o mai mare înclinare a planului apare alunecarea.
Tratarea tuturor situaţiilor în care cei doi cilindri sunt în contact se poate face folosind reprezentarea grafică din Figura 5.4.

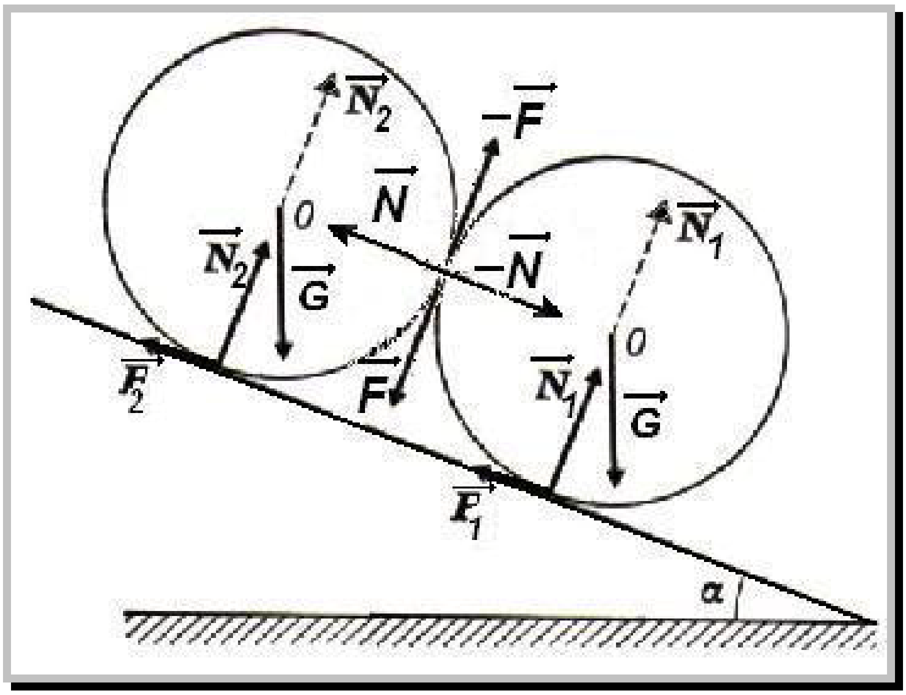


Figura 5.4

Chiar dacă va părea evident după rezolvare că echilibrul nu este posibil, merită să verifici acest detaliu, mai ales că impresia este aceea a unei şanse ca cele două corpuri să rămână în repaus, dacă înclinarea nu este prea mare. Ecuaţiile în acest caz sunt mai simple, respectiv

condiţia pentru echilibrul forţelor şi cea pentru echilibrul momentelor, cu restricţia ca cele trei (patru) forţe de frecare să fie mărginite de valorile respective de alunecare. Vei avea şase necunoscute, trei forţe normale şi trei forţe de frecare.

$$\begin{cases} G\cos\alpha + F - N_1 = 0 \\ G\sin\alpha - F_1 + N = 0 \\ G\cos\alpha - F - N_2 = 0 \\ G\cos\alpha - F_2 - N = 0 \\ R(F_1 - F) = 0 \\ R(F_2 - F) = 0 \\ F < \mu N \\ F_1 < \mu_1 \cdot N_1 \\ F_2 < \mu_2 \cdot N_2 \end{cases} \qquad (5.37)$$

Şi similar pentru al doilea cilindru.

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = mg\sin\alpha \dfrac{\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{6\mu} - 1}{1 + \dfrac{1}{\mu}} \\ F_1 = -\dfrac{mg\sin\alpha}{3} \end{cases} \qquad (5.38)$$

Se observă destul de uşor că cele trei *F* - uri (forţele de frecare) sunt egale– din relaţiile privind momentele – şi

$$\begin{cases} N_1 = G\cos\alpha + F \\ N_2 = G\cos\alpha - F \end{cases} \qquad (5.39)$$

dar

$$G\sin\alpha = 0 \qquad (5.40)$$

presupune o înclinare zero.
Deci, o poziţie de echilibru nu există pe planul înclinat.
Impresia, să spunem experimentală, provine din, pe de-o parte, idealizarea acestei frecări statice împreună cu prezumţia unei totale nedeformabilităţi a celor două suprafeţe în contact, prezumţie ireală, căci implică un contact - pe o linie fără dimensiuni - pe o suprafaţă zero deci cu o apăsare de presiune (efort unitar sau tensiune) infinită (!) iar pe de altă parte din desconsiderarea frecării tehnice la rostogolire, bazată tocmai pe deformabilitatea suprafeţelor în contact.

Dacă cilindri se rostogolesc astfel încât rămân în contact - dar fără alunecare, faţă de plan desigur, căci între ei avem neapărat alunecare, se impune evaluarea valorii normalei dintre cilindri care condiţionează şi existenţa unei forţe de frecare, asociată acestei apăsări. Să remarcăm că avem o singură acceleraţie liniară, comună şi, datorită nealunecării o singură acceleraţie unghiulară.
Deoarece pentru cilindru

$$I = \frac{mR^2}{2} \qquad (5.41)$$

rezultă

$$\begin{cases} N + G\sin\alpha + F_1 = m \cdot a_{CM} \\ -N + G\sin\alpha + F_2 = m \cdot a_{CM} \\ R(-F_1 - \mu \cdot N) = I \cdot \varepsilon = \dfrac{mR^2}{2}\varepsilon = \dfrac{maR}{2} \end{cases} \qquad (5.42)$$

şi rezolvând în continuare:

$$\begin{aligned} & F_1 = F_2 \\ & N = \frac{F_1}{\mu} - \frac{m \cdot a}{2\mu} \\ & F_1\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + G\sin\alpha = ma\left(1 + \frac{1}{2\mu}\right) \\ & F_2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + G\sin\alpha = ma\left(1 - \frac{1}{2\mu}\right) \end{aligned} \qquad (5.43)$$

din care poţi deduce că

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = mg\sin\alpha \dfrac{\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{6\mu} - 1}{1 + \dfrac{1}{\mu}} \\ F_1 = -\dfrac{mg\sin\alpha}{3} \\ N = \dfrac{1}{\mu} mg\sin\alpha\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \qquad (5.44)$$

dar mai ales că această constatare se putea reţine şi din observaţia că întruna din relaţii acceleraţia avea un coeficient (factor) care conţine un semn minus, deci s-ar fi putut anula, ce a ce este absurd. Constatare care se întrevedea fie din egalitatea acceleraţiilor cu valoarea de la rostogolirea unui singur cilindru, fie din ultima pereche de relaţii.
Deci cei doi cilindri nu se jenează, reciproc, deloc.

$$a = \frac{2}{3} g \cdot \sin\alpha \qquad (5.45)$$

Dacă amândoi cilindri alunecă în timpul rostogolirii, din examinarea soluţiilor obţinute deja, se remarcă necesitatea ca cilindrul înaintaş să fie cel care prezintă o frecare mai mare. Într-adevăr, acceleraţia mai mare apare la corpul cu frecare mai mică, deci numai aşa vor rămâne în contact. Reluând ecuaţiile, cu o normală, ca interacţiune între cilindri, vom avea drept necunoscute o acceleraţie şi două acceleraţii unghiulare care ne dau valorile normalelor. Şi după înlocuiri succesive, folosind:

$$\begin{cases} N_1 = G\cos\alpha \dfrac{2+\mu(\mu_1+\mu_2)}{2-\mu(\mu_1-\mu_2)} \\ N_2 = G\cos\alpha \dfrac{-2+\mu(\mu_1+\mu_2)}{2-\mu(\mu_1-\mu_2)} \\ R(F_1 - F) = I\cdot\varepsilon_1 \\ R(F_2 - F) = I\cdot\varepsilon_2 \end{cases} \qquad (5.46)$$

vei avea

$$\begin{cases} N = G\cos\alpha \dfrac{\mu_1+\mu_2}{2-\mu(\mu_1-\mu_2)} \\ F = \mu\cdot G\cdot\cos\alpha \dfrac{\mu_1+\mu_2}{2-\mu(\mu_1-\mu_2)} \\ \varepsilon_1 = \dfrac{g}{2R}\cos\alpha \dfrac{2\mu_1+\mu\cdot\mu_1(\mu_1+\mu_2)-\mu(\mu_1+\mu_2)}{2-\mu(\mu_1-\mu_2)} \\ \varepsilon_1 = \dfrac{g}{2R}\cos\alpha \dfrac{-2\mu_2+\mu\cdot\mu_2(\mu_1+\mu_2)-\mu(\mu_1+\mu_2)}{2-\mu(\mu_1-\mu_2)} \\ a = g\cdot\sin\alpha\cdot\left(\dfrac{2}{\mu(\mu_1-\mu_2)}-1\right)-\dfrac{\cos\alpha}{\mu} \end{cases} \qquad (5.47)$$

Se remarcă unele dificultăţi, care fac problema, oarecum, neliniară, în sensul mai modern al fizicii neliniare (dinamică neliniară)- căci aceste expresii de la numitor care se pot anula, din jocul valorilor coeficienţilor de frecare, obligă la reluarea problemei. De fapt, regăsim soluţiile de la cazurile când cei doi cilindri se mişcau la fel.

În încheiere ar mai trebui examinate cazurile când numai unul din cilindri alunecă - şi celălalt nu - sau cazurile în care mişcarea cilindrilor este de natură să schimbe sensul uneia din forţele de frecare. În aparenţă 2+8 cazuri, în fapt mult mai puţine

Câteva observaţii finale:

La alunecare, centrul instantaneu de rotaţie - centrul vitezelor ar putea să nu mai fie în punctul de contact.

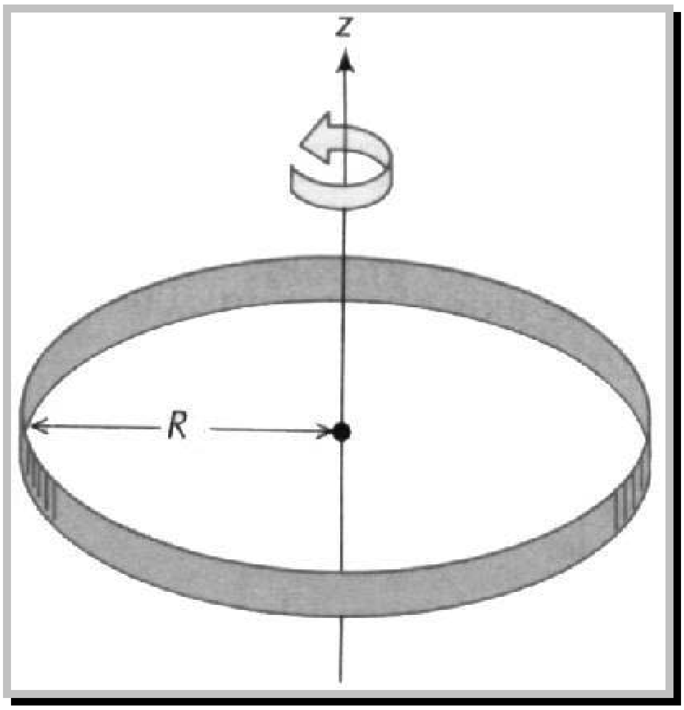
Deoarece factorul acceleraţiei conţine un minus la numitor, puteam anticipa că normala dintre cilindri este nulă la o rostogolire identică a acestora.

S-ar putea pune şi întrebarea dacă al doilea μ ar putea să fie negativ - dar să remarcăm că în această situaţie sensul forţelor de frecare nu se schimbă! Reţine că rezolvarea detaliată a unei probleme referitoare la un solid rigid real poate fi extrem de delicată. Şi reţine de asemenea că înainte de a începe –tehnic - rezolvarea problemei este necesară o bună modelare a fenomenelor şi o analiză detaliată a tuturor situaţiilor imaginabile.

5.6 Exemple de calcul al momentelor de inerţie

Aşa cum ai constatat din problema anterioară, în studiul dinamicii solidului rigid cunoaşterea momentului de inerţie este esenţială.
Momentele de inerţie pot fi calculate, din aproape în aproape, pornind de la formele cele mai convenabile, pentru care intuiţia permite o rezolvare imediată.

Putem spune direct, **fără nici o sumare sau i ntegrare** cât este momentul de inerţie al unui cerc subţire, **faţă de o axă care trece prin centrul său** şi este **perpendiculară pe planul cercului**. Într-adevăr, toate părţile cercului se află la aceiaşi distanţă (**R**), de axa aleasă (de centrul cercului, prin care trece axa), astfel că dacă l-am imagina făcut din particule (elemente de masă, mase elementare), toate vor contribui la $\mathbf{I_{zz}}$, momentul de inerţie axial, faţă de axa O**z**, cu:



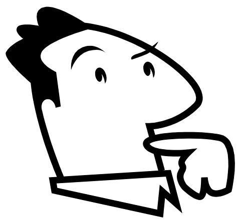


Figura 5.5

$$dI = (dm)R^2 \qquad (5.48)$$

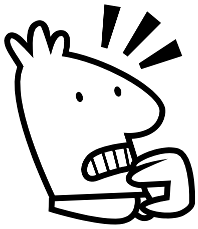
şi deci I_{zz} nu poate fi decât

$$I_{zz} = mR^2 \qquad (5.49)$$

Atunci îţi poţi imagina că un disc este realizat din multe inele concentrice, aşezate unul lângă altul (o mulţime de coroane circulare), toate de aceiaşi lăţime, *dr*, şi a căror masă o poţi deduce pornind de la masa discului, prin regula de trei simplă.
Dacă la o suprafaţă a discului $S = \pi R^2$ corespunde masa *m*, atunci la o suprafaţă *dS*, a unei coroane circulare foarte înguste corespunde ***dm*.**
Aria unei coroane circulare se poate calcula simplu din produsul lungimii sale ($2\pi r$) cu lăţimea (*dr*). Prin urmare aria coroanei circulare elementare este

$$dS = 2\pi \cdot r \cdot dr \qquad (5.50)$$

şi atunci, regula de trei simplă te conduce la



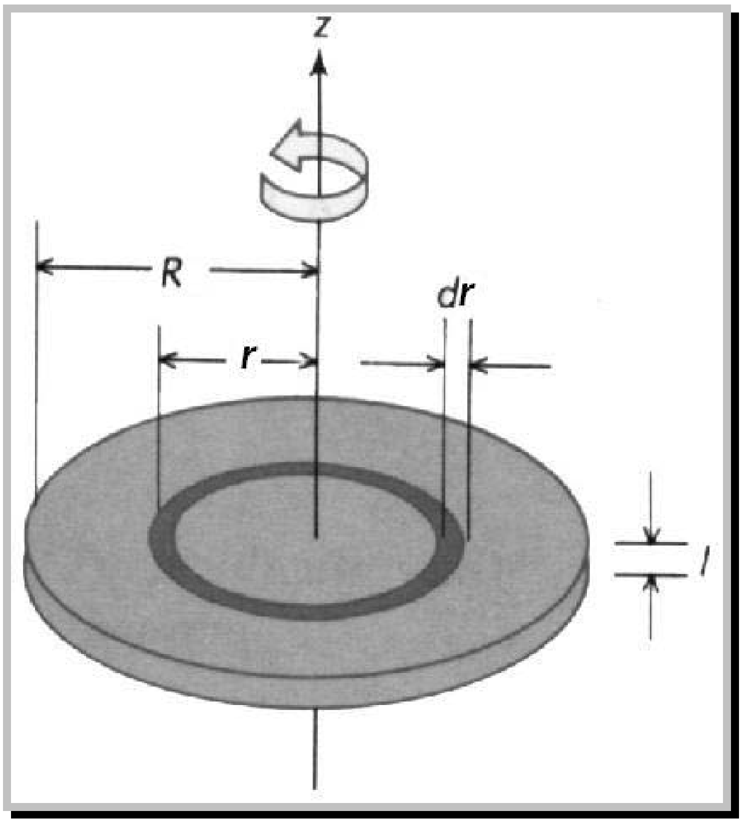


Figura 5.6

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi \cdot r \cdot dr = \frac{2m \cdot r \cdot dr}{R^2} \qquad (5.51)$$

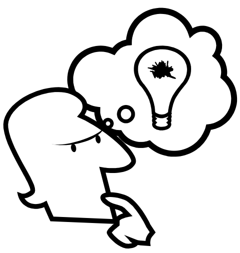
cu un moment de inerţie, (parţial) al coroanei circulare, *dI*

$$dI = dm \cdot r^2 = \frac{2m \cdot r^3 \cdot dr}{R^2} \qquad (5.52)$$

Sumarea aceasta se poate face, la mare nevoie şi prin mijloace elementare, dar totuşi o "integrală" este mai la locul ei.

Calculul momentului de inerţie presupune deci o integrală definită, de unde încep inelele şi până unde se termină, adică pentru raze ale coroanelor circulare elementare în domeniul *[0,R],* respectiv astfel încât coroanele circulare să "acopere" integral suprafaţa discului. În concluzie

$$I = \int_0^R \frac{2m \cdot r^3 \cdot dr}{R^2} = \frac{2m \cdot R^4}{4 \cdot R^2} = \frac{m \cdot R^2}{2} \qquad (5.53)$$



Expresie care reprezintă momentul de inerţie al unui disc, plin, faţă de o axă care trece prin centrul său şi este perpendiculară pe planul discului. Deoarece grosimea discului nu a intervenit în calcul putem trage concluzia că dacă punem mai multe discuri de aceeaşi rază, unul peste altul, astfel încât să constituie un cilindru (ca la un teanc de monezi!), momentul total (momentul de inerţie al unui cilindru), va fi suma momentelor de inerţie ale discurilor, care au aceleaşi raze, R:

$$J_{cilindru\ plin} = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (5.54)$$

desigur, masa, m fiind acum masa acestui disc "gros" care este cilindrul nostru . Figura 5.7.

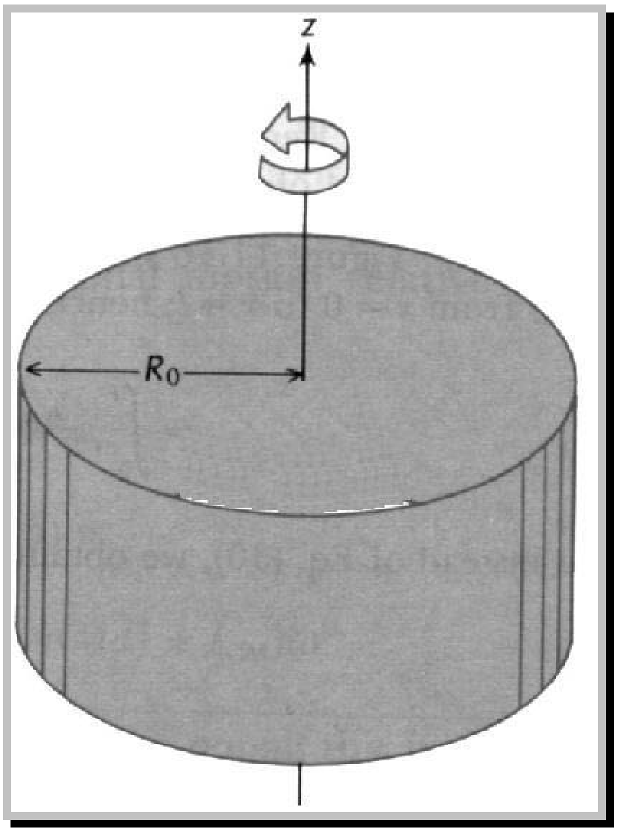
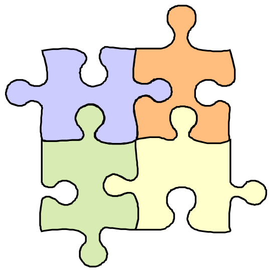


Figura 5.7



Din aproape în aproape, am putea calcula momentul de inerţie al unui con, drept, faţă de axa lui de simetrie, axa conului. O idee ar fi să "tăiem acest morcov" în feliuţe transversale (cam cum se taie în mod uzual un morcov!), care înseamnă un teanc de discuri, dar de raze diferite şi deci de mase diferite. Câteva indicaţii: masele feliilor, sunt proporţionale cu suprafaţa lor, πr^2. Razele "feliilor", r, sunt proporţionale cu distanţa feliilor la vârful conului. Dacă vizualizăm conul ca un morcov cu vârful în jos, asemănarea triunghiurilor care se formează, este mai uşor de urmărit.

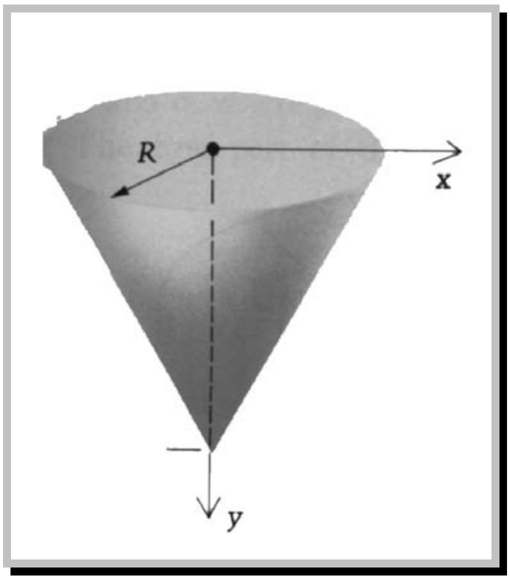
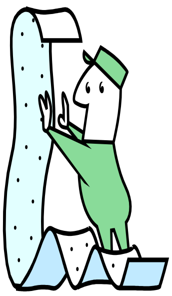


Figura 5.8



Cu aceste indicaţii şi folosind metodica deja aplicată pentru disc, poţi încerca un calcul al momentului de inerţie al conului faţă de axa proprie de simetrie. Vei obţine dacă lucrezi corect, valoarea

$$I_{con} = \frac{3}{10} mR^2 \qquad (5.55)$$

Volumul unui con este: aria bazei ori înălţimea supra trei, *de altfel orice formă "piramidală", fie piramidă, fie con, fie chiar şi sferă (considerată ca un ansamblu de piramide cu vârful spre interior, cam cum este alcătuit ananasul!!!):* $V_{con} = \pi R^2 h/3$; $I_{con} = 3m R^2/(10)$.
Cine se mai încumetă la un calcul, după atâtea detalii ?

Momentul de inerţie al unei bare se poate calcula (în raport cu o axă perpendiculară pe bară), faţă de o axă care trece prin capăt, prin mijloc sau printr-un punct oarecare de pe bară– ori din afara ei!

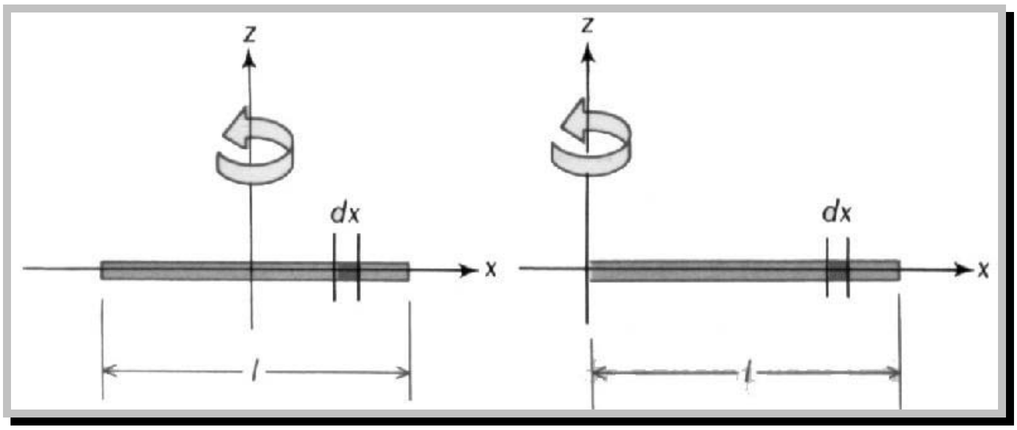


Figura 5.9

Cu regula de trei simplă**, masa porţiunii elementare** din bară va fi

$$dm = \frac{m \cdot dx}{L} \qquad (5.56)$$

astfel că momentul de inerţie al porţiunii elementare de bară este

$$dI = x^2 \cdot dm = \frac{m}{L} x^2 dx \qquad (5.57)$$

Integrala care permite calculul momentului de inerţie integral al barei faţă de un capăt (ca în imaginea din dreapta în Figura 5.9) este

$$I = \int_0^L \frac{m}{L} x^2 dx \qquad (5.58)$$

astfel că valoarea acestui moment este

$$I = \frac{mL^2}{3} \qquad (5.59)$$

Ce ar trebui modificat ca să obţii momentul de inerţie faţă de o axă care trece prin centrul barei şi este perpendiculară pe bară? Poate alte limite de integrare?

Într-adevăr, noul moment de inerţie corespunzător situaţiei barei din imaginea din stânga din Figura 5.9. este

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{(x)^3}{3} \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = m \frac{L^2}{8} \frac{2}{3} = \frac{1}{12} mL^2 \qquad (5.60)$$

Observaţie. În mod tradiţional axele de rotaţie se desenează punctat, cel mai des în succesiunea "liniuţă punct liniuţă punct" etc.

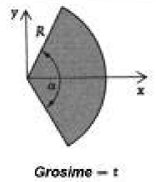
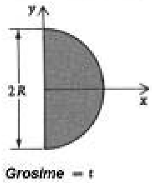
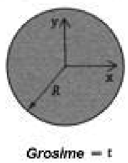
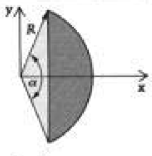
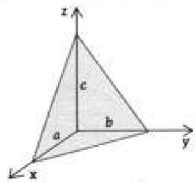
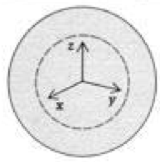
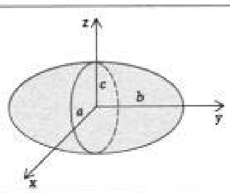
	Obiect	*Coordonatele centrului de masă şi Volumul*	*Momentele de inerţie faţă indicate*
Sector circular plat	 *Grosime = t*	$\left(\frac{2R\sin(\alpha/2)}{3\alpha/2}, 0, 0\right)$ $V = \frac{\alpha R^2 t}{2}$	$I_x = \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $I_y = \frac{mR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $I_z = \frac{mR^2}{2}$
Cazuri speciale **1.** $\alpha = \pi$: *Placă semicirculară*	 *Grosime = t*	$\left(\frac{4R}{3\pi}, 0, 0\right)$ $V = \frac{\pi R^2 t}{2}$	$I_x = I_y \approx \frac{mR^2}{4}$ $I_z = \frac{mR^2}{2}$
2. $\alpha = 2\pi$: *Placă circulară (disc)*	 *Grosime = t*	$(0, 0, 0)$ $V = \pi R^2 t$	$I_x = I_y \approx \frac{mR^2}{4}$ $I_z = \frac{mR^2}{2}$
Segment de cerc, plat	 *Grosime = t*	$\left(\frac{4R\sin^3(\alpha/2)}{3(\alpha - \sin\alpha)}\right)$ $V = \frac{R^2 t}{2}(\alpha - \sin\alpha)$	$I_x = \frac{mR^2}{12}(3 - k)$ $I_y = \frac{mR^2}{4}(1 + k)$ $I_z = \frac{mR^2}{6}(3 + k)$ unde $k = \frac{(1 - \cos\alpha \ldots}{\alpha - \sin\alpha}$
Tetraedru rectangular		$\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$ $V = \frac{abc}{6}$	$I_x = \frac{m}{10}(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{m}{10}(a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{m}{10}(a^2 + b^2)$
hollow sphere		$(0, 0, 0)$ $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m\left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right)$
Elipsoid		$(0, 0, 0)$ $V = \frac{4}{3}\pi abc$	$I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$

Figura 5.10

Înseamnă că momentul de inerţie al unei plăci plane are aceeaşi expresie cu cel al unei bare. Dar în cazul unei sfere, cum ar trebui să procedăm? Poate să "tăiem" sfera în discuri subţiri, paralele– ca pe o lămâie – (perpendicular pe axa de simetrie) felii de grosimi "*dz*", de raze diferite "*r*", de mase "*dm*" şi, evident de momente de inerţie "*d*I".
Ce alte momente de inerţie am mai putea calcula? Poate o placă dreptunghiulară?
(Pentru momentele de inerţie există tabele şi culegeri de expresii pentru diferitele forme mai răspândite sau mai frecvent întâlnite în aplicaţiile tehnice. Tabelele din Figurile5.10 şi 5.11 cuprind date despre momente de inerţie la cele mai diferite obiecte

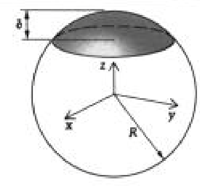
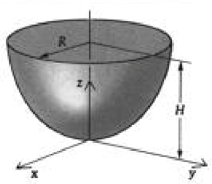
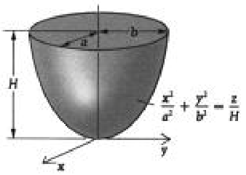
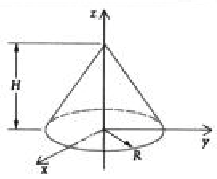
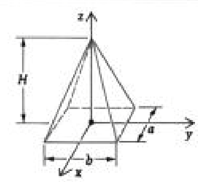
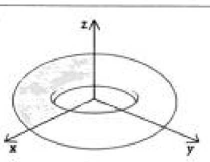
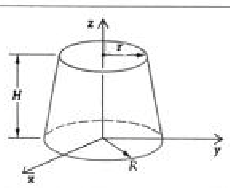
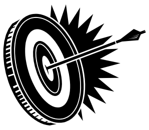
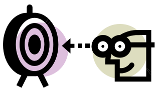
	Obiect	*Coordonatele centrului de masă şi Volumul*	*Momentele de inerţie faţă de axele indicate*
Calotă sferică plină		$\left(0, 0, \frac{3(2R-\delta)^2}{4(3R-\delta)}\right)$ $V = \frac{\pi}{3}\delta^2(3R-\delta)$	$I_x = I_y = \frac{m}{2}\left[2R^2 - \frac{3(10R^2-\delta^2)\delta}{5(3R-\delta)} + \frac{3\delta^2}{2}\right]$ $I_z = \frac{m\delta}{10}\left[\frac{20R^2 - 15R\delta + 3\delta^2}{3R-\delta}\right]$ (*pentru* $\delta = R$, *emisferă* $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$, $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ and $z_C = \frac{3}{8}R$.)
Paraboloid de rotaţie		$(0, 0, \frac{2}{3}H)$ $V = \frac{\pi R^2 H}{2}$	$I_x = I_y = \frac{m}{6}(R^2 + 3H^2)$ $I_z = \frac{mR^2}{3}$
elliptic paraboloid		$\left(0, 0, \frac{2H}{3}\right)$ $V = \frac{\pi abH}{2}$	$I_x = \frac{m}{6}(b^2 + 3H^2)$ $I_y = \frac{m}{6}(a^2 + 3H^2)$ $I_z = \frac{m}{6}(a^2 + b^2)$
Con plin		$\left(0, 0, \frac{H}{4}\right)$ $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$	$I_x = I_y = \frac{m}{20}(3R^2 + 2H^2)$ $I_z = \frac{3}{10}mR^2$
solid right rectangular prism		$\left(0, 0, \frac{H}{4}\right)$ $V = \frac{abH}{3}$	$I_x = \frac{m}{80}(4b^2 + 8H^2)$ $I_y = \frac{m}{80}(4a^2 + 8H^2)$ $I_z = \frac{m}{20}(a^2 + b^2)$
Tor plin		$(0, 0, 0)$ $V = 2\pi^2 R r^2$	$I_x = I_y = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$ $I_z = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$ *Pentru R >>r torul devine cerc pentru care* $I_x = I_y = mR^2/2 \qquad I_z = mR^2$.)
Trunchi de con		$\left(0, 0, \frac{H(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}\right)$ $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$	$I_x = I_y =$ $\frac{m}{20}\left[3(R^2 + r^2) + \frac{(2R^2 + 6Rr + 12r^2)H^2 - 3 [illegible] R}{R^2 + Rr + r^2}\right.$ $I_z = \frac{3m(R^5 - r^5)}{10(R^3 - r^3)}$

Figura 5.11

5.7 Test de autoevaluare5.1.

Răspunde la întrebările testului de mai jos


1. Prin ce se caracterizează mişcarea plan-paralelă?

2. Care este energia cinetică de rotaţie a unui solid rigid?

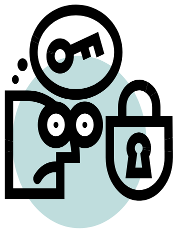
3. Cum se defineşte momentul de inerţie al unui punct material?

4. Calculează momentul de inerţie al unui sfert de cerc faţă de centrul cercului din care a fost tăiat. Firul din care este făcut sfertul de cerc are masa m şi raza r

5 Calculează momentul de inerţie al unui sfert de disc cu masa m şi raza r faţă de centrul cercului din care a fost tăiat

Răspunsurile la întrebările testului le găseşti la pagina 117

5.8 Lucrări de laborator



A. Conservarea impulsului

Caută o planşetă cu rotile, sau ceva similar. Caută o maşinuţă de jucărie, cu arc sau chiar electrică, în stare de funcţionare! Aşează„vehiculul” la marginea planşei şi porneşte-l.

- Planşeta ar trebui să se deplaseze în sens opus. De ce ?
- Măsoară deplasarea planşetei, şi a maşinuţei faţă de un reper exterior planşetei precum şi lungimea planşetei.
- Cu o balanţă cântăreşte cele două obiecte. Deplasările şi masele intră într-o relaţie astfel încât centrul de masă la început şi la sfârşit trebuie să fie în acelaşi loc. De ce ?
- Verifică afirmaţia de mai sus.
- Dacă ai putea dispune de două maşinuţe, identice ai putea face o experienţă pornindu-le de la capetele opuse de-o dată, una spre cealaltă. Ce se va întâmpla?

B. Determinarea coeficientului de frecare la rostogolire.

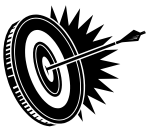
- Caută un cilindru, o cutie de bere, un deodorant, un spray sau o cutiuţă de vitamina C umplută cu nisip ca să fie mai grea. Cutia de bere va fi mai utilă, la fel, umplută cu nisip şi sigilată cu ceva (un leucoplast sau bandă adezivă).
- Caută o foaie de burete de la un ambalaj pentru mobilier.
- Aşează foaia buretoasă pe un plan înclinat şi modifică înclinarea planului până obţii rostogolire uniformă. Atunci: $tg\alpha$ = coeficientul de frecare la rostogolire, α fiind unghiul la care începe rostogolirea. Ţi-am sugerat aceste materiale deoarece coeficientul de frecare la rostogolire este mic şi doar pe o suprafaţă deformabilă creşte astfel încât unghiul să aibă valori mai uşor de măsurat.
- Dacă aşezi corpul cilindric cu generatoarea în lungul planului, putem prin aceeaşi metodă să aflăm coeficientul de frecare la alunecare.
- Compară cele două rezultate . Discuţie.
- Refă experimentul cu mai multe suprafeţe deformabile dar şi cu un corp deformabil – o minge mai dezumflată sau o minge medicinală sau altceva.

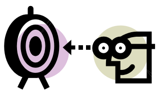
C. Determinarea centrului de greutate

- Ia o riglă mai lungă şi aşeaz-o pe muchia unei prisme triunghiulare sau pe generatoarea unui semi cilindru, astfel încât să fie în echilibru. Poţi folosi un corp cilindric dar ţinut fix pe masă.
- Notează diviziunea riglei care se află pe linia de sprijin.

- Pentru o riglă omogenă ar trebui să fie la mijloc. De ce?
- Aşează la capetele riglei două gume la fel sau mai bine două bucăţi de cretă egale astfel încât să realizezi echilibrul.
- Apoi, păstrând una din crete nemişcată, pune două crete în cealaltă parte şi notează noua poziţie care realizează echilibrul.
- Apoi trei crete etc.
  Dacă ai efectuat cu grijă echilibrările, produsul dintre distanţele cretelor la linia de echilibru cu numărul de crete, ar trebui să fie constant. De ce ?
- Verifică această presupunere.

5.9 Răspunsuri la testul de autoevaluare





Răspunsuri la Testul de autoevaluare 5.1

1. În această mişcare – plan paralelă – traiectoriile punctelor solidului sunt paralele cu un plan fix. Toate punctele solidului situate pe o normală la acel plan se mişcă identic. De aceea mişcarea plan-paralelă se reduce la mişcarea unei figuri plane în planul său.

2. Energia cinetică de rotaţie a unui solid rigid este $E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k R_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$, unde $I \overset{def}{=} \sum_k m_k R_k^2$ este momentul de inerţie al rigidului faţă de axa de rotaţie.

3. Momentul de inerţie al unei punct material faţă de o axă este egal cu produsul dintre masa punctului material şi pătratul distanţei sale până la axa: mR^2.

4. Masa porţiunii elementare din arc este $dm = \frac{2m}{r\pi} r \cdot d\theta$. Momentul de inerţie este $J = \int_0^{\pi/2} r^2 \frac{2m}{\pi} d\theta = mr^2$. Firesc, nu?

5.Masa „dreptunghiului elementar de laturi $x \cdot d\theta$ şi dx este $dm = \frac{4m}{\pi r^2} x \cdot dx \cdot d\theta$. Momentul de inerţie „elementar” este

$dJ = \frac{4m}{\pi r^2} x^3 \cdot dx \cdot d\theta$ iar momentul sfertului de disc este

$$j = \frac{4m}{\pi \cdot r^2} \int_0^r x^3 dx \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{mr^2}{2}$$

Dacă n-ai ales răspunsurile corecte, ar trebui să reciteşti paragrafele 5.1, 5.2 şi 5.6

5.10 Termeni şi expresii cheie. Formule cheie

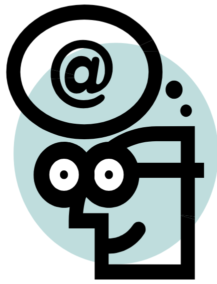
Termeni şi expresii cheie

- Solid rigid.
- Mişcare plan paralelă
- Centrul vitezelor, centrul acceleraţiilor
- Mişcare elicoidală instantanee
- Efectul forţelor şi momentelor asupra mişcării solidului rigid
- Moment de inerţie

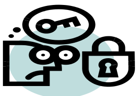
Formule cheie

- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{R}'$ viteza în sistemul mobil
- $E_{rot} = \sum_k \frac{1}{2} m_k R_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$ Energie cinetică de rotaţie
- $\begin{cases} I = \sum_k m_k R_k^2 = mR_g^2, (\mathrm{m} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{m_k}) \\ I = \int R^2 dm = mR_g^2 \end{cases}$ Moment de inerţie
- $I = \frac{1}{12} mL^2$ Momentul barei faţă de centru

5.11 Lucrare de verificare 5



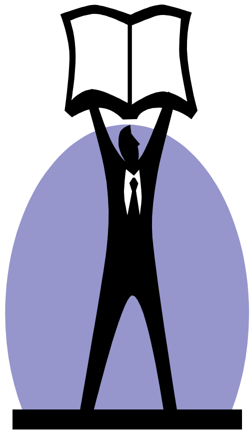
Rezolvă problemele de mai jos.
Fiecare din aceste probleme îşi are răspuns în materialul expus în această **Unitate de învăţare**. Pentru detalii suplimentare sau lămuriri, consultă **Bibliografia** sau contactează autorii la adresa de e-mail oferită în **Introducere**. Răspunsurile corecte la această lucrare nu trebuie să depăşească două pagini A4.
Trimite tutorelui soluţiile pe care le consideri corecte.

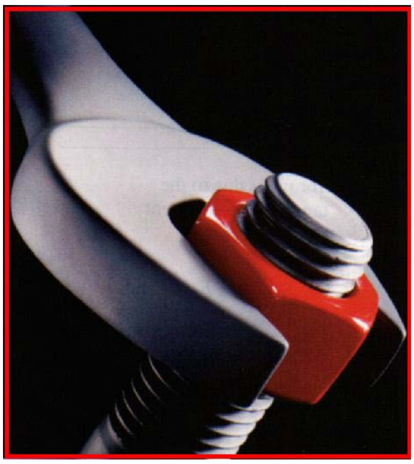


1. Calculează momentul de inerţie al unui cilindru faţă de axul propriu (1 punct)
2. Calculează momentul de inerţie al unui cilindru faţă de o generatoare (1 punct)
3. Calculează momentul de inerţie al unui con. Faţă de axul propriu (1 punct)
4. Calculează momentul de inerţie al unei pânze de con faţă de axul propriu (1 punct)
5. Calculează momentul de inerţie al unei sfere faţă de un diametru (1 punct)
6. Determină poziţiile centrelor de masă pentru con, emisferă şi placă semicirculară (2 puncte)

7. Împlineşte cerinţele lucrării practice din 5.8. Descrie într-un protocol măsurările făcute şi prezintă rezultatele obţinute. (2 puncte)

din oficiu, (1 punct)
Total (10 puncte)





5.12 Bibliografie

1.A. P. Hristev, Curs de Mecanică Fizică şi Acustică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 (paginaţia corespunde ediţiei a II-a), pag. 94-134

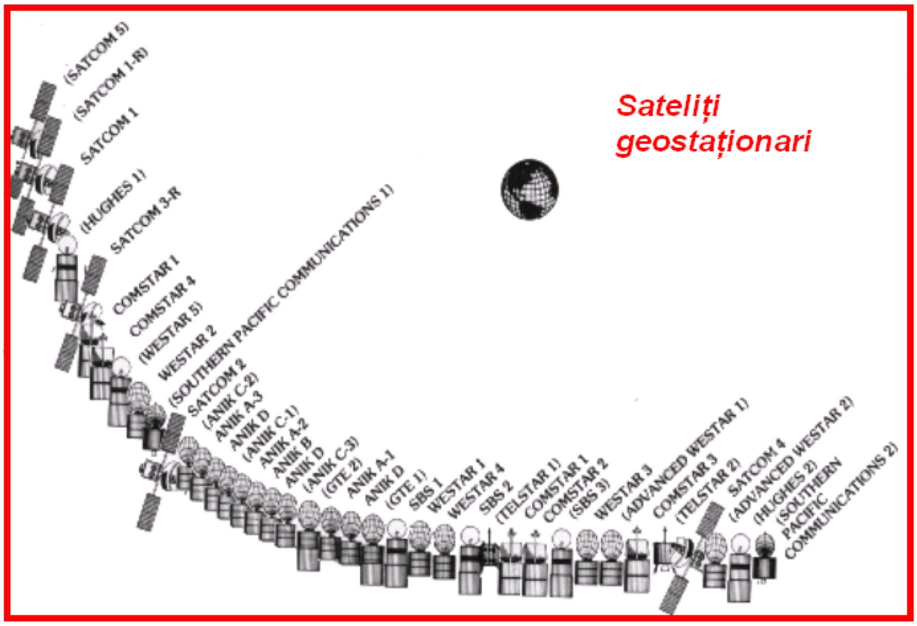
2.A. P. Hristev, V. Fălie, D. Manda, Fizica, Manual pentru clasa a IX-a, Ed. Pedagogică, Bucureşti, 1979, 1981, 1984, pag. 172-220

3.***, Probleme de Fizică pentru clasele IX-X, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1983, pag. 52-65

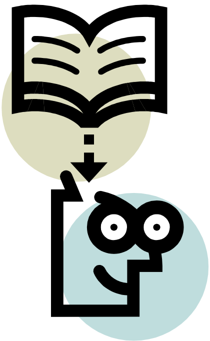
Unitatea de învăţare 6

ATRACŢIA GRAVITAŢIONALĂ

Cuprins **Pagina**



6.1 Obiectivele unităţii de învăţare 6



Când vei termina de studiat acest capitol vei fi capabil să:

- *identifici mărimile şi noţiunile specifice câmpului gravitaţional;*
- *identifici noţiuni şi concepte necesare formulării teoriei relativităţii restrânse;*
- *explici unele elemente de cinematică şi dinamică relativistă rezultate din postulatele teoriei relativităţii şi transformările Lorentz;*
- *stabileşti corelaţii între mărimile fizice caracteristice fenomenelor studiate,în scopul rezolvării unor probleme sau al unor aplicaţii teoretice şi/ sau practice;*
- *utilizezi cunoştinţele dobândite în analiza unor sisteme tehnologice;*

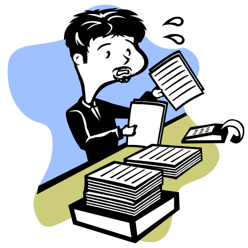
6.2 Forţa Coriolis şi rotaţia Pământului

Imaginează-ţi un eschimos care şi-a construit igloo-ul exact deasupra polului nord. Dimineaţa, înainte să plece, face să oscileze un pendul pe direcţia intrării în coliba sa din blocuri de gheaţă. Oare ce găseşte la întoarcere după "o jumătate de zi" (6 ore)?

Pendulul are o mişcare circulară, în planul lui de oscilaţie şi, în absenţa unor momente ale forţelor externe, îşi va conserva momentul cinetic. Dar singura legătură a pendulului cu "exteriorul" este firul, care, perfect flexibil, nu poate să transmită un moment al vreunei forţe. Prin urmare **momentul cinetic se conservă atât ca mărime cât şi ca orientare**, iar planul de oscilaţie va rămâne acelaşi.

(*Pentru cârcotaşi*. Există la capetele "cursei" respectiv la capătul fiecărei semioscilaţii un moment – de timp – de viteză zero, când şi momentul cinetic este zero, dar atât de scurt timp încât nu poate influenţa problema!

În realitate există un moment al forţelor externe care influenţează mişcarea, cel al forţelor de frecare cu aerul , dar pentru discuţia noastră este neimportant, deoarece el este perpendicular pe planul de oscilaţie,



respectiv paralel cu momentul cinetic "de bază". Frecările vor influenţa doar amplitudinea oscilaţiilor, micşorând-o.

Mai există un moment al unei forţe externe care influenţează mişcarea, cel al greutăţii, **aici – la pol** — **identificabilă** cu forţa de atracţie universală din partea Pământului. Dar şi acest moment cinetic este neimportant discuţia noastră, pentru că este tot perpendicular pe planul de oscilaţie.
Prin urmare, dacă planul de oscilaţie rămâne acelaşi, eschimosul va regăsi pendulul oscilând pe o direcţie perpendiculară celei de "dimineaţă". Ar putea crede că cineva, ca să îl necăjească, a oprit pendulul şi l-a făcut să oscileze altfel!
Dacă însă este conştient că se află într-un sistem în rotaţie, un sistem de referinţă **neinerţial**, ***îşi va spune că, probabil, există o forţă de inerţie*** – şi nu greşeşte!

Forţa de inerţie care apare în sistemul neinerţial prezentat mai sus, aflat în rotaţie, poartă denumirea de **forţă Coriolis**, de la numele inginerului francez Coriolis.

În exemplul prezentat mai sus poţi considera, **fie că pământul s-a rotit** şi odată cu el tavanul casei, pendulul păstrându-şi planul de oscilaţie şi deci modificându-şi poziţia relativă în casă, **fie că în sistemul neinerţial** a acţionat o forţă din familia forţelor de inerţie, **forţa Coriolis**.
Perioada de rotaţie a pendulului este de aproximativ 24 de ore, cât perioada de rotaţie a Pământului de sub casă, ***mai exact 23 ore 56 minute şi 4 secunde.***

Reţine că pentru un observator aflat într-un sistem de referinţă neinerţial, care se roteşte cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ faţă de un sistem de referinţă inerţial, asupra unui punct material de masa m şi viteză relativă $\vec{v}_{rel}$ acţionează o forţă complementară numită forţă Coriolis

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} \qquad (6.1)$$

Dacă notezi cu ω viteza unghiulară de rotaţie a Pământului, iar cu θ latitudinea locului (la pol, $\theta = 90$ *grade*),atunci asupra corpurilor aflate în mişcare relativă faţă de Pământ acţionează o forţa Coriolis care are modulul:

$$F_{Cor} = 2m\cdot\omega\cdot v_{rel}\cdot\sin\theta \qquad (6.2)$$

Inginerul francez Gaspard Coriolis nu a realizat experimentul de la polul nord, dar compatriotul lui Leon Foucault, a realizat un pendul, lung de 67 m, cu o bilă de circa 28 kg, suspendat de tavanul cupolei Pantheonului din Paris, pendul care de altfel s-a numit „pendulul lui Foucault" . La Paris, locul experimentului, perioada cu care planul de oscilaţie se învârte în jurul verticalei locului este ceva mai complicat de dedus, dar este de 31 ore şi 47 minute.
Expresia perioadei la o latitudine θ ca funcţie de perioada la pol este :

$$T_{latitudinea\,\theta} = \frac{T_{pol}}{\sin\theta} \qquad (6.3)$$

în care θ are aceeaşi semnificaţie de latitudine a locului.

La Bucureşti, cât ar fi această perioadă ? Dar în localitatea în care este şcoala în care lucrezi?

Crezi că ai putea construi un pendul Foucault, care să facă experimentul posibil şi în şcoala ta?

Consideră un punct material ce se deplasează de-a lungul unui meridian ca în figura următoare şi observă orientarea forţei Coriolis în funcţie de sensul lui $\vec{v}_{rel}$ şi de emisfera în care se deplasează acel punct material.

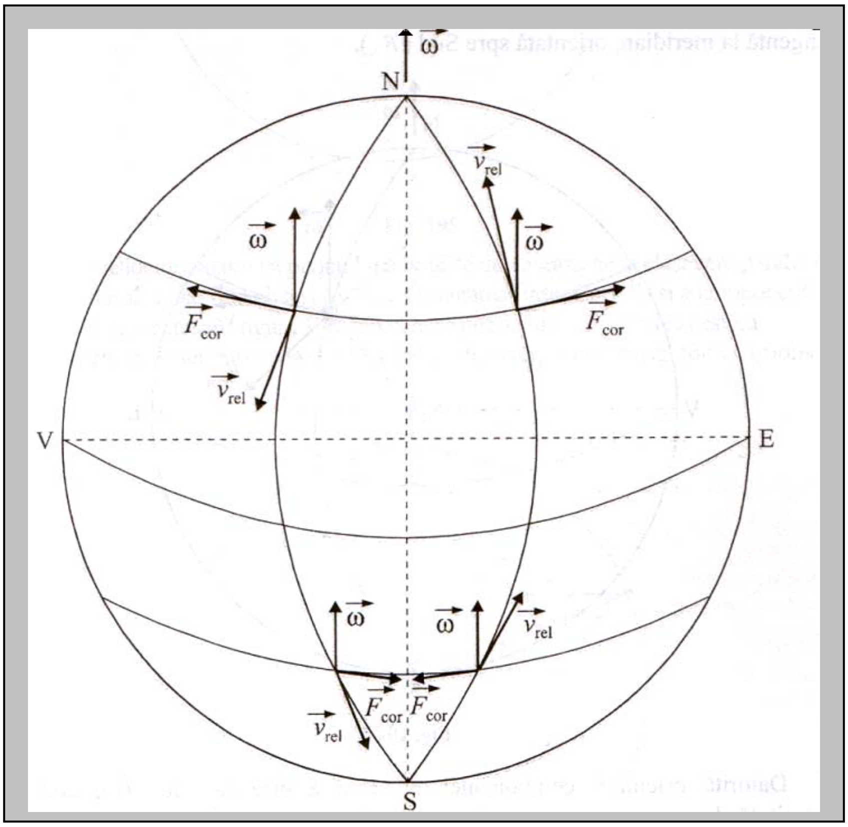


Figura 6.1

Concluzia ta va fi că:
- în emisfera nordică, indiferent de sensul mişcării forţa Coriolis este mereu orientată spre dreapta în raport cu sensul mişcării
- în emisfera sudică, indiferent de sensul mişcării forţa Coriolis este mereu orientată spre stânga în raport cu sensul mişcării

De aceea râurile şi fluviile din emisfera nordică erodează întotdeauna malul lor drept (în raport cu sensul de curgere), la fel cum toate trenurile uzează mai mult şina din dreapta căii lor de rulare. În schimb, în emisfera sudică râurile şi fluviile erodează întotdeauna malul lor stâng (în raport cu sensul de curgere)

Traiectoriile proiectilelor cu bătaie lungă sunt şi ele deviate, suficient de mult, cât să nu nimerească ţinta.

Crezi că acest fel de deviere de la planul traiectoriei teoretice, ar putea fi motivul mingiilor şutate care parcă ocolesc portarul de la fotbal?

6.2.1 Căderea corpurilor şi forţa Coriolis. Devierea spre est

Atunci când un corp cade liber, acesta are o mişcare relativă faţă de sistemul în rotaţie solidar legat de Pământ şi deci, asupra corpului acţionează o forţă Coriolis. Deoarece această forţă provine dintr-un produs vectorial este perpendiculară pe vectorul viteză din timpul căderii. Această forţă transversală faţă de direcţia iniţială de mişcare, va implica o acceleraţie ce va devia corpul de la o cădere strict verticală:

$$a = 2\omega_{rotatie\,Pamant} \cdot v_{cadere} = 2\omega_{rotatie\,Pamant} \cdot g \cdot t \qquad (\ 6.49$$

În aceste condiţii, viteza de deviere laterală este

$$v_{deviere} = 2\omega_{rotatie\,Pamant} \cdot \left(\frac{g \cdot t^2}{2}\right) \qquad (\ 6.5)$$

şi devierea propriu-zisă apare din integrarea relaţiei de mai sus sub forma

$$D = 2\omega_{rotatie\,Pamant} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{g \cdot t^3}{2}\right) = \omega_{rotatie\,Pamant} \cdot \left(\frac{g \cdot t^3}{3}\right) \qquad (\ 6.6)$$

Întrucât spaţiul de cădere este

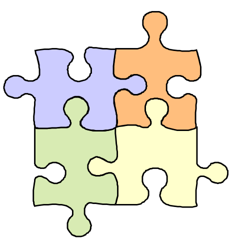
$$h = \frac{g \cdot t^2}{2} \qquad (\ 6.7)$$

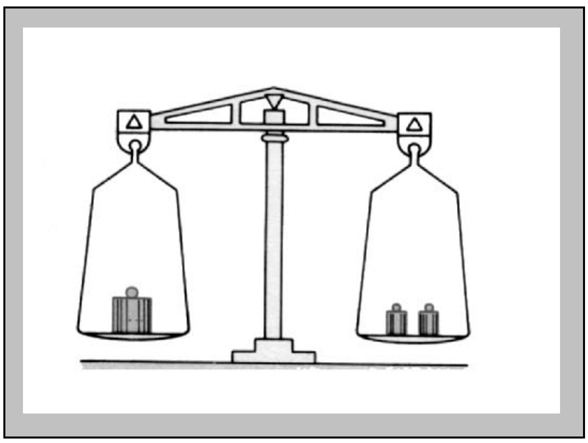
poţi scrie D în forma:

$$D = 2\omega_{rotatie\,Pamant} \cdot \frac{h}{3}(2g \cdot h)^{1/2} \qquad (\ 6.8)$$

deviaţie care la căderea **în emisfera nordică**, este conform produsului vectorial, îndreptată spre est. Acestei deviaţii i se spune scurt „devierea spre est”.

Dar în emisfera sudică? Dacă avem deviere spre est, vom avea şi o deviere la deviere? Şi aşa mai departe!
Dar la lansarea unei rachete pe verticală?





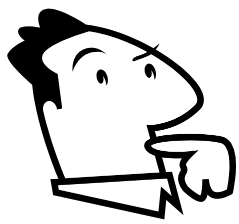


Figura 6.2

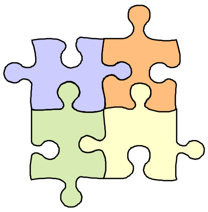
Ce cântărim? Este o discuţie la care sunt implicaţi mereu profesorii.

Dacă foloseşti o balanţă de piaţă gen dinamometru, este evident că vei măsura forţa deformatoare de la capătul resortului – fie el liniar sau de torsiune. Dar această forţă este chiar greutatea corpului !

Dacă foloseşti o balanţă cu un taler, cum sunt cele moderne cu afişaj (cu cristale lichide), aceasta are în construcţia sa tot un dinamometru

Dacă foloseşti o balanţă cu două talere, fie cea de „farmacie, de laborator" , fie cea de „piaţă" , Robertwall, fie cea „romană" cu contragreutate compari momentul forţei de greutate a corpului de cântărit cu momentul forţei corespunzător greutăţilor marcate.

În toate aceste exemple, la cântăririle de zi cu zi se măsoară direct sau indirect greutăţile corpurilor.



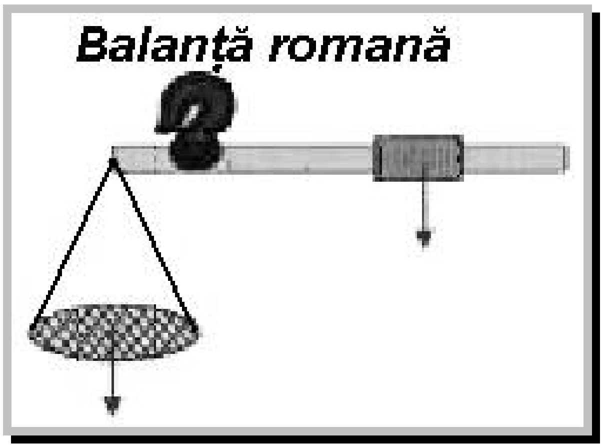


Figura 6.3

Masa se măsoară greu. Cele două moduri de definire a masei, ca inerţie a corpurilor sau ca sursă a atracţiei universale între corpuri pot sta la baza metodelor de a măsura masele.

Masa care se opune accelerării poate fi măsurată cu dispozitive numite accelerometre.

Masa care intervine în forţa de atracţie universală se poate măsura cu o balanţă foarte specială şi foarte sensibilă, dat fiind că forţa produsă asupra unor corpuri „pământeşti de mici" este mică.

Savantul englez Cavendish a propus un mod de a măsura direct efectul forţei atracţiei universale. Cavendish a folosit o balanţă de torsiune, o bară orizontală, cu două bile la capete, suspendată la mijloc cu o panglică subţire de cuarţ. Rotirea barei produce un moment de torsiune în panglica de cuarţ.

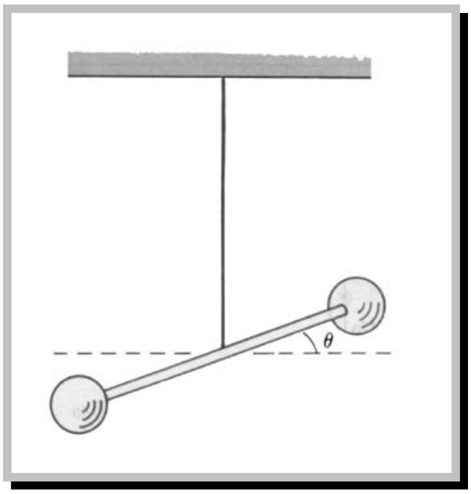
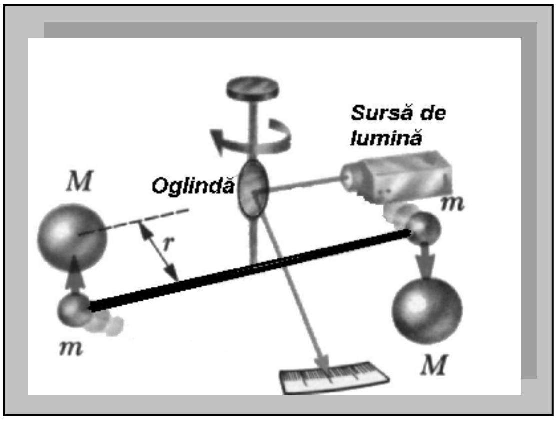


Figura 6.4 Balanţă de torsiune



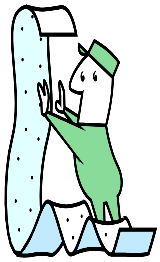
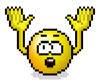


Figura 6.5 Balanţa Cavendish

Dacă de bilele balanţei de torsiune se apropie, simetric, două mase mari, (de plumb, pentru că este mai dens dar şi mai ieftin decât aurul sau uraniul) de circa 5 kg, masele mici vor fi atrase şi pendulul se va roti până când cuplul forţelor de atracţie este echilibrat de momentul produs de torsiunea firului. Cu destul de multe precauţii, acest sistem poate permite măsurarea constantei atracţiei universale k. Sau cel puţin ar permite vizualizarea atracţiei universale. "Astăzi" devierea sistemului, se poate urmări trimiţând fasciculul unui laser (fie el şi de jucărie) pe o oglinjoară ataşată sistemului mobil, anume bara cu cele două corpuri mici. De ce mici, pentru ca să putem utiliza un fir subţire şi deci cu constantă de torsiune mică. Un fir de plastic poate servi la fel de bine ca şi firul de cuarţ. *Te încumeţi să construieşti o astfel de balanţă?*



Coulomb, aproximativ un secol după Newton şi Cavendish, a considerat că între sarcinile electrice, forţa electrostatică trebuie să aibă o expresie similară atracţiei universale, soluţie care s-a confirmat. Forţele electrostatice sunt mai mari, ele sunt vizibile la electrizări de zi cu zi, şi o măsurare similară celei propuse de Cavendish nu ar fi la fel de dificilă.

Câteva date "geometrice" despre planeta Pământ:

Distanţele la Soare:

Maximă – 152.109 m

Minimă – 147.109 m

Medie – 149,2.2.109 m

Excentricitatea orbitei eliptice – 0,017

Viteza medie pe orbită – 29.800 m/s

Viteza de scăpare (a doua viteza cosmică) 11,3 km/s

Perioada de rotaţie (evoluţie) – 365,26 zile

Perioada de rotaţie (revoluţie în jurul axei proprii) – 23,93 ore

Masa – 5,972.2.1024 kg

Densitatea medie – 5520 kg/m3

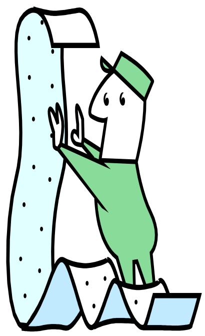
Înclinarea axei faţă de normala la planul orbitei – 23,45 grade de arc

Acceleraţie gravitaţională la ecuator – 9,78 m/s2

Depărtarea polilor magnetici faţă de polii geografici – aproximativ 1.600 km

Deschiderea conului de precesie al axei pământului 53 grade de arc

Durata precesiei, perioada de precesie, 222.000 ani



Efectul Soarelui în "precesie" aproximativ 1/3, (16 secunde de arc anual)
Contribuţia Lunii la precesia Pământului aproximativ 2/3 (34 secunde de arc anual, ca viteză unghiulară de precesie)
Perioada nutaţiei aproximativ 305 zile

Pământul se mişcă în jurul Soarelui pe o elipsă (ecliptica). Totodată, Pământul se roteşte în jurul propriei axe de rotaţie – notată *R* în Figura 6.6. Dar axa proprie de rotaţie a Pământului nu rămâne paralelă cu ea însăşi în de cursul mileniilor, ci execută o mişcare care descrie o pânză conică. În figură. „drumul” axei de rotire este marcat cu litera *P.* Această mişcare se numeşte *mişcare de precesie* sau precesia axei Pământului. Pentru această modificare de moment cinetic sunt necesare momente ale unor forţe externe şi "responsabilitatea" revine atât Soarelui cât şi Lunii şi, dat fiind raportul distanţelor, mai mult Lunii. Pe acest ***con de precesie*** axa terestră are o tendinţă de a descrie un al doilea con, mult mai mic ca deschidere la vârf , mişcare care poartă numele de **nutaţie** marcată în imagine cu *N.* Acest fel de comportare se poate sesiza şi la un titirez care este ceva mai bine construit, mai mare şi mai echilibrat.
Totul seamănă cu folia obţinută la ascuţirea unui creion cu o ascuţitoare clasică.

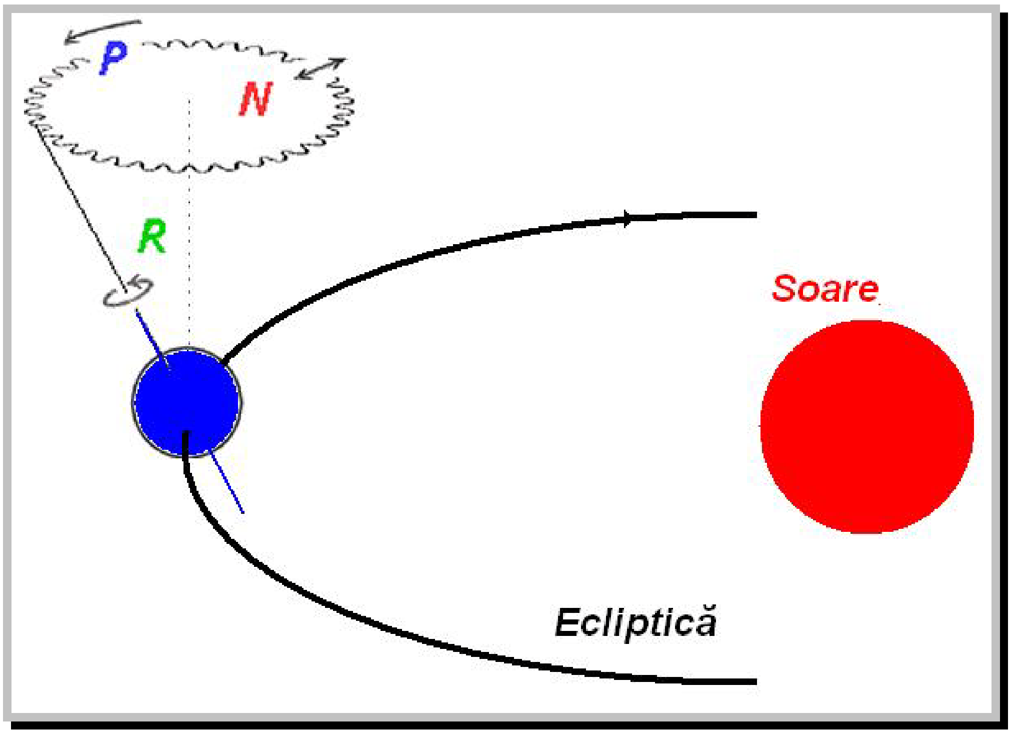


Figura 6.6 În Figură proporţiile ***NU*** *sunt respectate*

Câteva date "geometrice" despre Lună :
Distanţele la Pământ:
Maximă – 402.2.697 km
Minimă – 352.2.410 km
Medie – 384.000 km

Viteza medie pe orbită – 3680 km/oră
Viteza de scăpare (a doua viteza cosmică) – 2,38 km/s

Perioada de rotaţie în jurul axei proprii – 27 zile 7 ore 43 minute 11,5 secunde
Perioada de rotaţie pe orbită în jurul Pământului – 27 zile 7 ore 43 minute 11,5 secunde
Perioada de repetare a fazelor Lunii– 29 zile 12 ore 44 minute 2,8 secunde
Masa – (1/81) 5,972.2.1024 kg
Densitatea medie – (0,6) 5520 kg/m3
Înclinarea axei faţă de normala la planul orbitei – 1,53 grade de arc
Înclinarea planului orbitei faţă de cea a Pământului – 5,15 grade de arc
Acceleraţie gravitaţională la ecuatorul lunar – (1/6) din 9,78 m/s2
Unghiul sub care se vede Luna de pe Pământ – 0,518 grade de arc
Unghiul sub care se vede Pământul de pe Lună – aproximativ 0,987 grade de arc

6.3 Legea atracţiei gravitaţionale

Fizicianul englez Isaac Newton a fost preocupat de ideea că dacă pe Pământ acţionează o forţă asupra oricărui corp, acelaşi fel de forţă trebuie să existe atât în apropierea Pământului cât şi mai departe de

acesta . Newton a considerat că forţa gravitaţională se exercită atât asupra unui măr care cade cât şi asupra Lunii pe orbita ei staţionară. Lucrările lui Newton datează din anii 1667, dar publicarea lor a întârziat deoarece Newton a ezitat asupra ipotezei sale că atât Pământul cât şi un corp mic pot fi considerate puncte materiale, sau altfel spus, că Pământul poate fi considerat ca şi cum toată masa lui este concentrată în centrul său.
Isaac Newton, a determinat pe baza observaţiilor anterioare existente la acea epocă, că forţa de atracţie dintre două corpuri suficient de depărtate pentru a fi considerate puncte materiale este are modulul:

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r_2} \qquad (6.9)$$

relaţie în care constanta *k,* constanta atracţiei universale ale valoarea *k*= 6,67 · 10^{-11}unităţi S.I., *r* este distanţa dintre punctele materiale de mase m_1 şi m_2, iar forţa *F* se află pe dreapta suport care trece prin cele două puncte materiale.

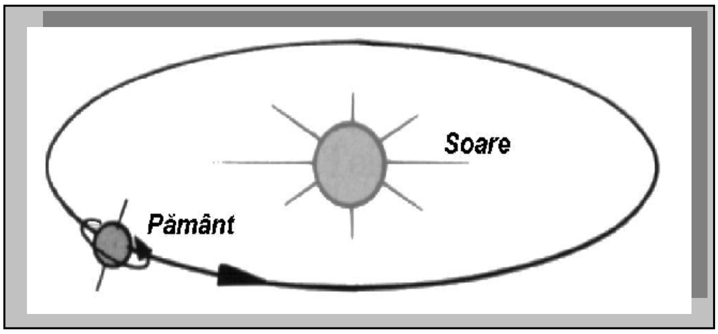


Figura 6.7 Mişcarea Pământului în jurul Soarelui determinată de atracţia gravitaţională

Vectorial relaţia o poţi scrie:

$$\vec{F} = -k\frac{m_1 m_e}{r_2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (6.10)$$

unde $\frac{\vec{r}}{r}$ este un vector orientat în lungul dreptei care trece prin cele două puncte, orientat spre exterior. Deoarece

$$\left|\frac{\vec{r}}{r}\right| = \frac{|\vec{r}|}{r} = \frac{r}{r} = 1, \qquad (6.11)$$

$\frac{\vec{r}}{r}$ este vector unitar

Dacă vrei să fii mai explicit vei scrie:

$$\vec{F}_{atractia\,lui\,2a\,sup\,ra\,lui\,1} = k\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \qquad (6.12)$$

şi

$$\vec{F}_{atractia\,lui\,1a\,sup\,ra\,lui\,2} = k\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \qquad (6.13)$$

şi este evident că

$$\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12} \qquad (6.14)$$

Scrierea este corectă

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, \qquad (6.15)$$

cele două forţe reprezentând acţiunea-reacţiunea.
Urmărind imaginea de mai jos, reţine că:
Forţa de atracţie universală dintre două corpuri punctiforme are modulul direct proporţional cu produsul masele acestora şi invers proporţional cu pătratul distanţei dintre centrelor lor.
Legenda spune că I. Newton stătea la umbră sub un măr şi a avut inspiraţia referitoare la această lege atunci când i-a căzut unul din mere în cap.
Istoriografii lui Newton spun că legenda cu mărul nu este reală, dar că lui Newton i-a plăcut foarte mult şi a lăsat-o să circule fără să o nege!

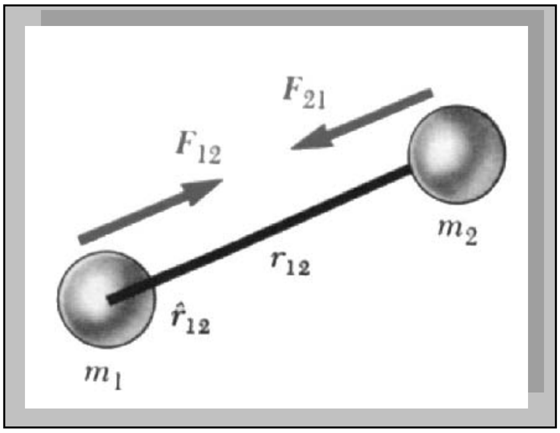
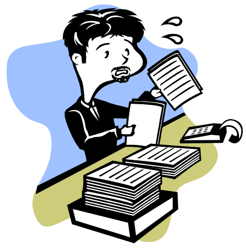


Figura 6.8



Pentru **corpuri sf erice** această prezumţie se dovedeşte adevărată. Newton a publicat în 1687 studiile sale asupra forţei gravitaţionale exprimând în cuvinte ce a ce astăzi se scrie

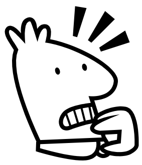
$$\vec{F} = -k\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -k\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{e}_r \qquad (6.16)$$

sau scalar

$$F = -k\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \qquad (6.17)$$

La acea vreme erau cunoscute rezultatele lui Galileo Galilei asupra căderii corpurilor (aproximativ anul 1600) dar şi lucrările lui Johanes Kepler (1571-1630) care în 1609 publicase " legile lui Kepler".

Kepler s-a bazat pe datele "experimentale" ale astronomului danez Tycho Brahe (1546-1601), care după 20 de ani de măsurători astronomice cu ajutorul unui telescop, strânsese suficiente date cât, mai târziu să îi permită lui Kepler să stabilească faptul ca planetele se mişcă pe orbite eliptice (prin "fitarea", *cum am zice astăzi*, a datelor astronomice).
Kepler a făcut aceste afirmaţii şi calcule în opoziţie cu modelul mai simplu al lui Nicholaus Copernic (din 1543) care fixa Soarele în centrul "sistemului solar" şi considera orbitele planetelor strict circulare. Modelul lui Copernic a fost contestat la vremea lui de către biserica catolică şi în 1633 Galilei a trebuit să retracteze afirmaţiile despre o posibilă mişcare a Pământului.



Dacă pentru Lună şi Soare rezolvarea este mai simplă, încercaţi să vedeţi care ar fi traiectoria – faţă de pământ – a unei planete oare care? Tare complicat!

Modelul lui Copernic se potriveşte foarte bine Pământului a cărui orbită este practic circulară. Fitarea datelor astronomice dar şi calculele astronomice s-au făcut doar cu răbdare, adică fără nici-un fel de mijloace de calcul moderne. Astăzi cu sprijinul principiilor dinamicii lui Newton şi a legii atracţiei universale, legile lui Kepler sunt obiect de studiu la clasa a 9-a .

> ***Legea întâia a lui Kepler*** **spune că orbitele planetelor sunt elipse – plane, având Soarele într-unul din focare.**

Această lege se deduce ceva mai greu, mai ales faptul că traiectoriile sunt strict eliptice, bucle închise. Dacă masa nu ar fi constantă, respectiv dacă masa planetei ar depinde de viteza pe orbită, atunci buclele eliptice nu s-ar mai închid perfect şi axa mare a elipsei s-ar roti încet.
Această rotire se mai numeşte **avansul per iheliului** planetei respective.
Avansul periheliului planetei Mercur, bine cunoscut de astronomi, a servit drept unul din "experimentele" capabile să susţină teoria relativităţii a lui Einstein.

Periheliu este punctul cel mai apropiat de Soare pentru o planetă, pe orbită.
Apheliu este punctul cel mai depărtat de Soare pentru o planetă, pe orbită (se citeşte "afeliu").
Perigeu este punctul cel mai apropiat de Pământ pentru un satelit pe orbită în jurul Pământului.
Apogeu este punctul cel mai depărtat de Pământ pentru un satelit pe orbită – eliptică – în jurul Pământului sau, privind lucrurile de la suprafaţa planetei noastre, punctul cel mai înalt.

***Legea a doua a lui Kepler* spune că vitezele areolare pe orbite ale planetelor sunt constante**

.
Prin **viteze areolare** sunt înţelese ariile măturate de razele vectoare ale planetei într-un anumit timp, scurt. Aceste **viteze areolare** diferă de la planetă la planetă.

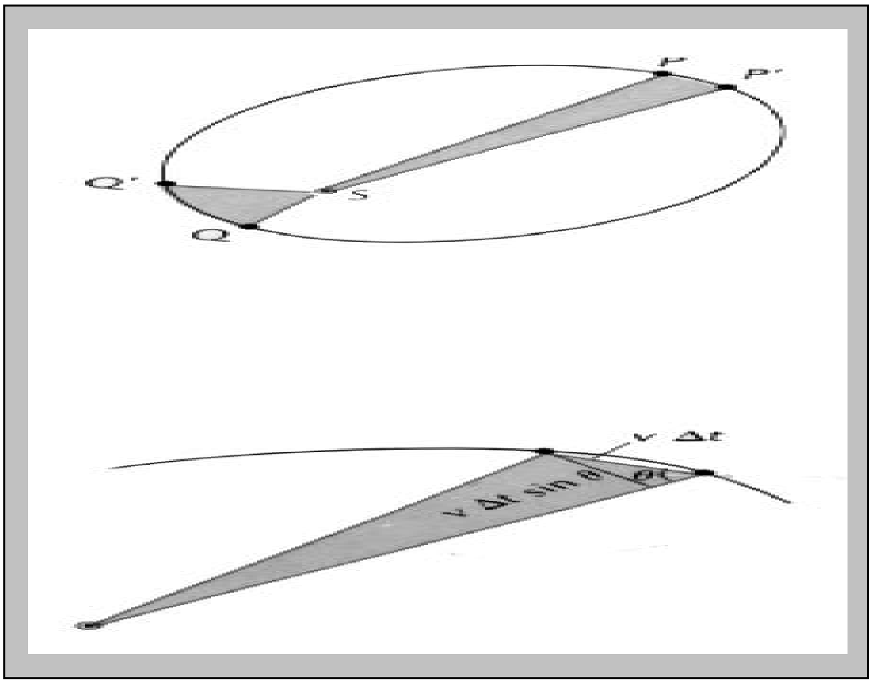


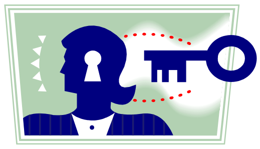
Figura 6.9 Viteza areolară

Legea a doua a lui Kepler evidenţiază faptul că mai aproape de Soare planetele au viteze liniare mai mari şi se vor mişca mai repede, iar la apheliu acestea au viteze mai mici. Aceleaşi concluzii se aplică oricăror corpuri care respectă acest fel de legitate, inclusiv electronilor pe orbite în jurul nucleului, dacă un asemenea model este acceptat.

***Legea a treia a lui Kepler* spune că pătratul anului planetelor (anul planetei) variază ca şi cubul distanţelor la soare (raza vectoare).**

Dacă vei considera teorema momentului cinetic, care precizează că

$$\Delta L = M_{extern} \cdot \Delta t \qquad (6.18)$$



respectiv că variaţia momentului cinetic este determinată de momentul forţelor externe**,** poţi remarca faptul că în cazul mişcării planetelor, forţa de atracţie gravitaţională are o direcţie ce trece prin centru – focarul, ales ca pol – şi, având braţ zero, va determina ca momentul forţei să fie de asemenea zero.

Dacă momentul forţei este zero se conservă momentul cinetic

$$\Delta L = 0 \qquad (6.19)$$

atât ca modul/mărime cât şi ca orientare(direcţie, sens).

Păstrarea aceleiaşi direcţii pentru vectorul moment cinetic, implică o traiectorie plană, pentru că doar astfel produsul vectorial dintre $\vec{r}$ şi $\vec{v}$ ar putea rămâne constant.

Astfel poţi demonstra o parte a primei legi a lui Kepler. Dacă se conservă momentul cinetic, inclusiv ca modul atunci

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot \sin\alpha$$

este constant şi cum unghiul lui r cu v este un unghi drept, cel puţin la periheliu şi apheliu, produsul rv este constant.

Dar

$$r \cdot v \cdot dt = r \cdot ds$$

ds fiind deplasarea pe arc, şi pentru timpi scurţi, de două ori aria "măturată" de raza vectoare.

$$\begin{cases} L \cdot dt = m \cdot r \cdot v \cdot dt = 2m(1/2)r(ds) = \\ L \cdot dt = 2m(aria\, maturata) = 2m(viteza\, areolara) \cdot dt \end{cases} \qquad (6.20)$$

$$L = 2m(aria\, maturata) = 2m(viteza\, areolara) \qquad (6.21)$$

Cea de a treia lege o vei deduce prin particularizarea la cazul unui satelit terestru, artificial şi anume satelitul **geostaţionar**.

Revenind la legea lui Newton a atracţiei universale, generalizarea lui Newton a constat în aceia ca a considerat că între orice două corpuri se exercită o forţă de atracţie a cărei expresie este cea din relaţia propusă de el sau mai modern scrierea ei vectorială.

Expresia forţei de atracţiei universală poate fi considerată sursa greutăţii, în "zona " planetei Pământ. Atunci

$$m \cdot g = k \frac{M_{Pamanat} \cdot m}{R^2}$$

sau

$$g = k \frac{M_{Pamanat}}{R^2}$$

Dacă un corp se află la suprafaţa pământului atunci

$$R = R_0$$

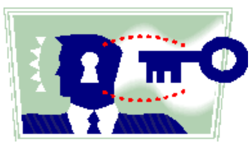
iar dacă ne aflăm la o înălţime oarecare, h, atunci

$$R = R_0 + h$$

Variaţia acceleraţiei gravitaţionale cu altitudinea devine:

$$g_h = k \frac{M_{Pamanat}}{(R_0 + h)^2} \qquad (6.22)$$

$$g_h = g_0 \cdot (R_o)^2 \frac{M_{Pamanat}}{(R_0 + h)^2} \qquad (6.23)$$



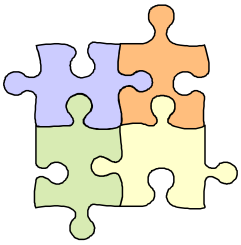
exprimare care nu te mai obligă să iei în considerare masa Pământului.

6.3.1 Firul cu plumb

Locul în care **"verticala locului" înţeapă bolta cerului se numeşte "zenit" iar cel opus lui "nadir".**

Firul cu plumb este un fir flexibil, care are la capătul său inferior o bucăţică dintr-un corp greu, în mod tradiţional plumb, dar tot atât de bine rolul plumbului poate fi luat de o piuliţă de oţel. **Firul cu plumb** se orientează după direcţia verticală, **"verticala locului"**.
Verticala ar trebui să reprezinte normala la suprafaţa terestră, considerând forma geometrică a "locului" respectiv. Dat fiind forma de "geoid" a Pământului, „raza” sau vectorul de poziţie în sistemul de referinţă cu originea în centrul Pământului, nu coincide cu normala (perpendiculara pe planul tangent) decât cel mult la poli şi la ecuator!

Dar este **firul cu plumb orientat realmente pe vreuna din aceste direcţii?**



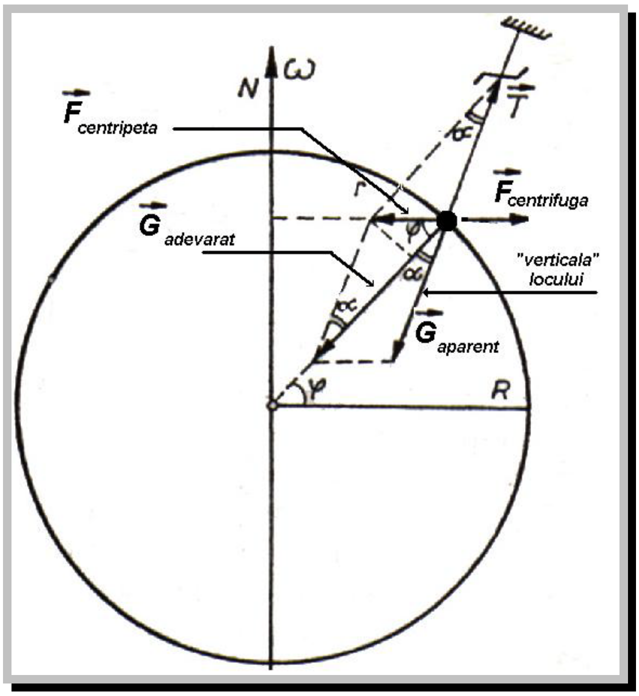


Figura 6.10 În figură proporţiile nu sunt respectate. De firul prins la capătul de sus este suspendat „plumbul” reprezentat prin discul negru

Asupra "plumbului" pentru a fi în echilibru, acţionează forţa de atracţie din partea Pământului, $\vec{G}_{ade\,var\,at}$ şi tensiunea din fir $\vec{T}$. Rezultanta lor trebuie să fie forţa centripetă $\vec{F}_{centripet[}$ care să egaleze centrifuga $\vec{F}_{centrifuga}$ datorată rotirii firului cu plumb împreună cu Pământul pe un cerc de rază *r* corespunzător latitudinii φ. Între direcţia razei locale (care ar fi direcţia verticalei „adevărate” – în absenţa rotaţiei Pământului) şi direcţia firului cu plumb – care este direcţia verticalei aparente apare o înclinare caracterizată de unghiul α.

Dacă, ţii seama şi de rotaţia Pământului, atunci trebuie să consideri că toate corpurile de pe Pământ şi din apropierea lui care se mişcă solidar cu Pământul, au mişcare de rotaţie şi deci acceleraţie centrifugă care compusă cu atracţia gravitaţională le determină o greutatea aparentă
.

În cazul sateliţilor geostaţionari, forţa de atracţie gravitaţională şi forţa centrifugă sunt coliniare, egale în modul şi de sensuri opuse. **Greutatea este zero**. Şi nu pentru că ne-am depărtat prea mult ci pentru că cele două forţe opuse sunt egale.

Atunci, înseamnă că **firul cu plumb se** va orienta după rezultanta dintre forţa atracţiei universale şi forţa centrifugă de inerţie. Cum cele două forţe nu sunt coliniare, **firul cu plumb,** va devia de la direcţia razei terestre.
Forţa care este efectivă asupra corpurilor, pe Pământ, poartă numele de **greutate. Greutatea este** rezultanta dintre forţa atracţiei universale şi forţa centrifugă de inerţie. Se foloseşte adeseori apelaţiunea **"forţa de greutate"**, dar deoarece este cea mai importantă forţă pentru percepţia noastră, i se cuvine un nume "propriu", **greutatea**, de altfel mai scurt, mai direct.

Rezultă că şi acceleraţia gravitaţională va îngloba aceleaşi consideraţii

$$\begin{cases} \vec{g} = \dfrac{\vec{G}}{m} \\ g = \dfrac{G}{m} \end{cases} \qquad (6.24)$$

Greutatea unui obiect de masă dată se va modifica la deplasare a pe suprafaţa Pământului. Schimbarea latitudinii determină modificarea forţei centrifuge şi schimbarea altitudinii locului în care se face măsurarea greutăţii determină modificarea atracţiei gravitaţionale

Dacă am dori să construim un turn de televiziune foarte înalt, care să permită acoperirea unei mari părţi de teritoriu, eventual mai multe continente?
O soluţie ar fi să lansăm un satelit care, ca şi vârful turnului să stea mereu deasupra aceluiaşi punct de pe pământ, pentru ca beneficiarii să nu îşi reorienteze mereu antenele de recepţie. Acest satelit, deci, trebuie să aibă aceiaşi perioadă de rotaţie cu cea a pământului şi va purta numele de "satelit geostaţionar" sau geosincron.

O primă întrebare ar fi "unde deasupra Pământului" să fie plasat. Cel mai convenabil şi firesc pentru noi, ar fi deasupra României. Dar ca să fie fix, în repaus în sistemul neinerţial pământ, suma forţelor trebuie să fie zero, adică **rezultanta dintre forţa atracţiei universale şi forţa centrifugă de inerţie să fie zero**, adică greutatea lui trebuie să fie zero!
Cele două forţe, forţa atracţiei universale şi forţa centrifugă de inerţie trebuie să fie **coliniare** şi egale. Există un singur plan unde cele două forţe sunt coliniare şi anume planul ecuatorial şi numai acolo!

Toţi sateliţii geostaţionari formează o centură (centura Clarck) în jurul Pământului, longitudinea lor putând fi aleasă în funcţie de interesele telespectatorilor vizaţi, respectiv de **aria de acoperire** dorită.

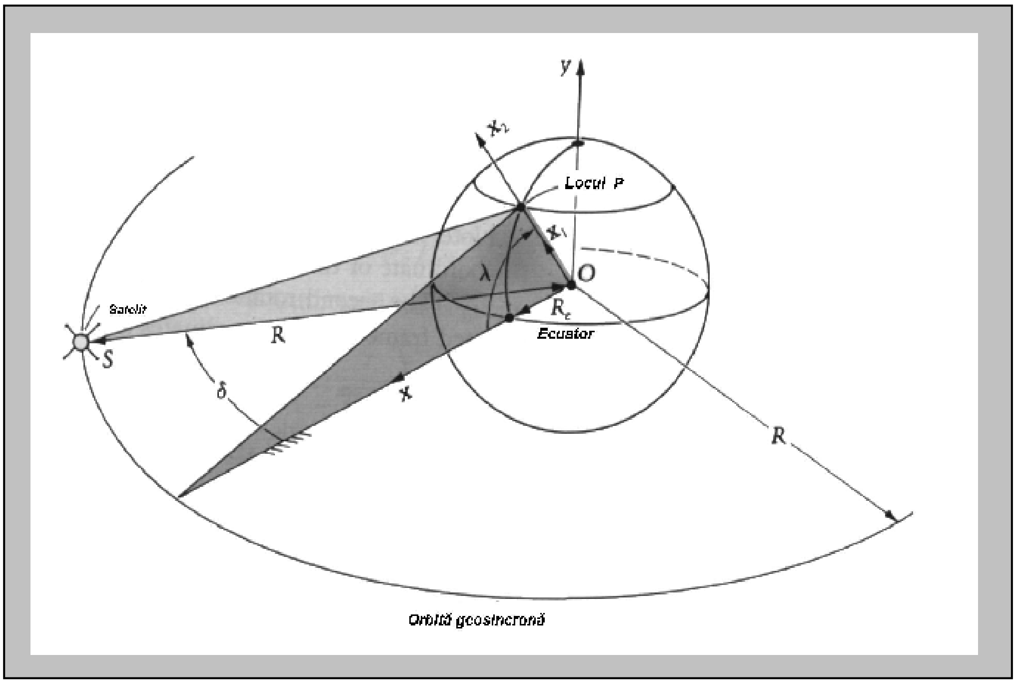


Figura 6.11 Poziţionarea unui satelit geostaţionar de comunicaţii S *în planul ecuatorial al Pământului*

La ce distanţă trebuie instalat, astfel încât şi cea de a doua condiţie să fie îndeplinită?

$$F_{atractie\,universala} = F_{centrifuga\,de\,inertie} \qquad (6.25)$$

Sau:

$$K\frac{M_{Pamant}\cdot m}{(R_0+h)^2} = m\cdot\omega^2\cdot(R_0+h) \qquad (6.26)$$

adică

$$K\frac{M_{Pamant}}{(R_0+h)^3} = \left(\frac{2\pi}{T_{Rotatie\,Pamant}}\right)^2 \qquad (6.27)$$

sau

$$\begin{cases} K\dfrac{R_0^2\cdot M_{Pamant}}{R_0^2\cdot(R_0+h)^3} = \left(\dfrac{2\pi}{T_{Rotatie\,Pamant}}\right)^2 \\ g_0\dfrac{R_0^2}{(R_0+h)^3} = \left(\dfrac{2\pi}{T_{Rotatie\,Pamant}}\right)^2 \end{cases} \qquad (6.28)$$

care după înlocuirea datelor "geometrice" conduce la o "înălţime" turnului de televiziune astfel constituit de circa 36.000 km. Aproape 6 raze terestre. Distanţa la centrul pământului va fi circa 42.000 km! Centura Clarck are o lungime de aproximativ 265.000 km, deci ar mai fi loc pentru ... câţiva sateliţi, chiar fără să se înghesuie!

Greutatea scade cu depărtarea de pământ. Dar ce se întâmplă cu cei care „călătoresc” spre centrul pământului? Ce se întâmplă cu **firul cu plumb dintr-un tunel care merge spre centrul** Pământului? La prima vedere forţa atracţiei universale creşte, îngrijorător chiar, datorită scăderii razei de la numitor!

Dar, o teoremă sau o proprietate a câmpurilor de forţe care depind de $1/r^2$ este aceea că numai masele interioare sferei imaginare pe suprafaţă căreia se află punctul material atras, produc efecte .

Toate forţele datorate maselor exterioare sferei imaginare pe care se află punctul în discuţie se compensează, reciproc. Într-adevăr, consideră o pătură sferică, exterioară punctului material, şi masele aflate în unghiul de deschidere a două conuri opuse la vârf, adică cuprinse în acelaşi ungi solid.

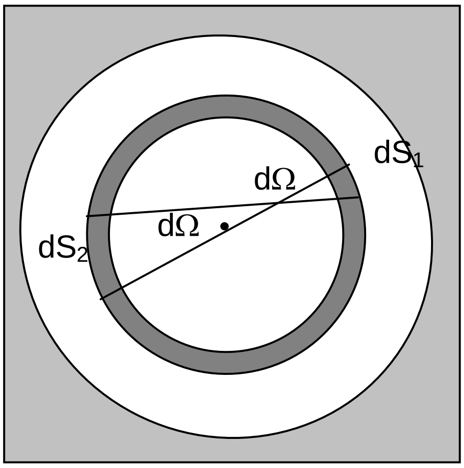


Figura 6.12

$$F_{stanga} = K\frac{m \cdot M_{stanga}}{R_{stanga}^2} \qquad (6.29)$$

$$F_{dreapta} = K\frac{m \cdot M_{dreapta}}{R_{dreapta}^2} \qquad (6.30)$$

Dar masele sunt proporţionale cu volumele, şi la aceeaşi grosime a păturii sferice cu suprafeţele

$$\begin{cases} M_{stanga} = \rho \cdot d \cdot S_{stanga} \\ M_{dreapta} = \rho \cdot d \cdot S_{dreapta} \end{cases} \qquad (6.31)$$

Dar prin însăşi definiţia unghiului solid

$$\begin{cases} \Omega = \dfrac{S_{stanga}}{R_{stanga}^2} \\ \Omega = \dfrac{S_{dreapta}}{R_{dreapta}^2} \end{cases} \qquad (6.32)$$

Imagine meteo din satelit

cele două unghiuri solide centrate în vârful comun al conurilor fiind egale ca opuse la vârf.

Rezultă că forţele datorate celor două elemente de masă ale păturii sferice sunt egale, şi de sens opus şi pe aceiaşi dreaptă suport şi au rezultantă zero. Numai masele interioare vor avea efect în valoarea

rezultantei forţei atracţiei universale din partea "Pământului" în acest exemplu.
Atunci, cum masa interioară este proporţională cu volumul sferei interioare

$$M_{interior} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}\rho \qquad (6.339$$

greutatea în interiorul pământului va fi

$$G = K \cdot \frac{m \cdot M_{interior}}{r^2} = k \cdot m \frac{4\pi \cdot r}{3}\rho \qquad (6.349$$

o forţă proporţională cu depărtarea la centrul Pământului, şi dat fiind că este de atracţie, respectiv îndreptată spre originea axelor, este o forţă de tip "elastic". Toate acestea, desigur, presupunând că densitatea Pământului nu variază spre interior.

*Firul cu plumb **aflat la centrul Pământului** va fi în echilibru indiferent deoarece şi forţa de atracţie universală şi forţa centrifugă de inerţie sunt zero.*

Cea mai mică greutate se realizează la ecuator. Înseamnă că este cel mai potrivit să cumperi aur dintr-o localitate ecuatorială şi să îl vinzi la eschimoşi ! Dacă găseşti cumpărător, disponibil. La o tonă de aur poţi câştiga valoarea a trei kilograme de aur, minus cheltuielile cu transportul, desigur. Totuşi, o corecţie de 0,3 % nu este de loc neglijabilă la măsurători mai precise.

6.4 Interacţiuni. Introducere

Ai întâlnit în paragrafele precedente forţe datorate mai ales acţiunii “directe” dintre corpuri:
- un fir de *legătură* produce asupra punctului material o forţă centripetă;
- contactul unui corp cu suprafaţa de sprijin produce o reacţiune (normală) asupra corpului;
- deplasarea unui corp pe o suprafaţă aspră , rugoasă dă naştere unei forţe de frecare la alunecare.

Observaţia arată încă să există şi alte feluri de forţe - forţe care se manifestă la distanţă, forţe care acţionează şi produc reacţiune, chiar dacă corpurile sunt depărtate.

Astfel, se ştie de la lecţiile de geografie, că pământul se învârte pe o orbită aproape circulară în jurul soarelui. Forţa centripetă necesară curbării traiectorii sau aşa cum se menţiona în capitolul precedent, forţa necesară pentru a produce o modificare a vectorului viteză este acţiunea Soarelui asupra Pământului.

6.4.1 Câmpul de forţe

Înseamnă că oriunde, în apropierea unui corp (de masă *M)* este suficient să aducem un alt corp pentru a constata existenţa unei forţe (de atracţie între cele două câmpuri). Un corp foarte mic, care ne serveşte spre a evidenţia prezenţa unei forţe (în acest caz) se numeşte corp de probă (sondă). Pentru a descrie efectul prezenţei corpului *M,* care ar putea fi evidenţiat prin corpul de probă, se introduce noţiunea de câmp de forţe. Corpul de probă este foarte mic, pentru ca prezenţa lui acolo să nu producă la rândul ei alt câmp.

Legenda spune ca Newton a descoperit atracţia gravitaţională privind un măr căzând din pom. Aşa, *între noi*, crezi că dacă îţi cădea un obiect în cap – ai fi putut descoperi legea atracţiei universale?

6.4.2 Intensitatea câmpului

Intensitatea câmpului de forţe (masice), $\vec{\Gamma}$ este definită astfel încât oricând să putem afla forţa $\vec{F}$.

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}, \qquad (6.35)$$

m fiind masa corpului aflat în câmp.

Noţiunea de câmp (de forţe) precum şi intensitatea $\vec{\Gamma}$,a câmpului permite să analizezi efectele făcând abstracţie de sursa (corpul) care creează câmpul.

4.3. Liniile de câmp

Curba care are drept tangente forţele (sau intensităţile câmpului) în fiecare punct se numeşte linie de câmp. Linia de câmp reprezintă traiectoria unui punct care s-ar deplasa lăsat liber în câmp.
Voi vedea în continuare că şi alte acţiuni ale corpurilor pot fi caracterizate cu ajutorul noţiunii de câmp.

6.4.3 Câmpul gravific.

Intensitatea într-un punct al câmpului gravitaţional este mărimea fizică exprimată prin forţa care acţionează asupra unităţii de masă a corpului de probă adus în acel punct al câmpului gravitaţional .

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m_2} = -k\frac{m_1}{r_1}\frac{\bar{r}}{r} \qquad (6.36)$$

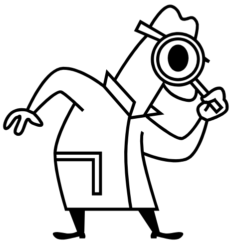
m_2 - masa corpului de probă plasat în câmpul gravitaţional
m_1 - masa care creează câmpul gravitaţional

Cunoscând intensitatea unui câmp de forţe care acţionează asupra maselor, poţi oricând să *reconstitui* forţa asupra unui corp
$\vec{F} = m_{corp} \cdot \vec{\Gamma}$

indiferent de modul cum a fost creat Γ , sau indiferent de faptul dacă ştii unde se află sursa (masa, masele) care creează câmpul.
Reţine că intensitatea câmpului este o mărime vectorială. Expresia matematică a intensităţii câmpului poate să difere în funcţie de corpul care generează câmpul, dar expresia

$$\vec{F} = m_{corp\,aflat\,în\,câmp}\,\vec{\Gamma}$$

rămâne aceeaşi.
Noţiunea de câmp se referă la proprietăţile spaţiului în care se manifestă intensitatea câmpului $\vec{\Gamma}$.
La modul general, câmpul reprezintă un continuu, o prezenţă punct cu punct a unei mărimi. Într-un solid care se roteşte avem un câmp al vitezelor. În fiecare punct avem definită o viteză care poate fi diferită de a punctului vecin. Aceeaşi proprietate este mai sugestivă la curgerea unui lichid.
În cazul câmpului de forţe din apropierea pământului vei avea *câmpul greutăţilor* corpurilor.



$$\vec{\Gamma}_g = \frac{\vec{G}}{m} \equiv \vec{g}$$

Intensitatea câmpului greutăţilor este chiar acceleraţia gravitaţională $\vec{g}$.
Remarcă însă că în această expresie $\vec{g}$ îşi are ca sursă atracţia dintre Pământ şi corp, în timp ce denumirea ei (acceleraţie gravitaţională) provine din considerarea principiului doi al dinamicii (acceleraţia produsă de greutate asupra unui corp în cădere liberă).
Şi, ca să fii consecvent, acest g conţine şi efectul rotaţiei Pământului.

6.4.4 Masa gravifică, masa inerţială

Cele două moduri de a *defini sau istoric vorbind, de a introduce masa ca noţiune* sunt complet distincte.
Masa introdusă de legea atracţiei universale, - masa care interacţionează - se numeşte masa gravitaţională sau **masă gravifică**;
Masa introdusă prin principiul doi al dinamicii - masa care se opune accelerării corpurilor - se numeşte **masă inerţială** (masă inertă). Nu există încă nici un temei ştiinţific, **încă**, să concludem că cele două mase sunt identice. Din punct de vedere experimental cele două mase sunt egale până la o abatere mai mică decât $\frac{1}{100.000.000.000} = 10^{-11}$

adică $\frac{\left|m_i - m_g\right|}{m_i} < 10^{-11}$., conform unui experiment efectuat la începutul anilor 70.

6.4.5 Forţa masică

Noţiunea de câmp se poate aplica şi altor feluri de forţe: forţe care acţionează asupra unor mase (numite **forţe masice**) cum ar fi forţa centripetă, forţele de inerţie, dar şi forţele care depind de alte mărimi decât masa corpului.

Ce alte forţe masice cunoşti?

Reţine următoarele relaţii referitoare la câmpul gravitaţional:

$$\begin{cases} F = k\dfrac{m_1 m_2}{r_2} \\ \Gamma = k\dfrac{m_1}{r_1} \\ V = k\dfrac{m_1}{r} \\ E_{pot} = k\dfrac{m_1 m_2}{r} \\ E_{cin} = \dfrac{mv^2}{2} \end{cases} \qquad (6.37)$$

6.5 Statica

Statica studiază echilibrul corpurilor sub acţiunea forţelor.
În continuare vei separa problemele staticii punctului material de cele ale a solidului rigid. Dar pentru început ar trebui să examinezi axiomele şi noţiunile specifice acestui domeniu.
Principalele probleme practice de statică se referă mai ales la echilibrul în câmpul gravitaţional terestru.
Vom profita de „simplitatea” – aparentă a acestui capitol, în care nimeni nu se mai mişcă, şi îl vom încărca cu câteva concepte care trebuiau, poate, lămurite mai înainte

Axiome.
1. Pentru ca două forţe aplicate unui solid rigid să fie în echilibru este necesar şi suficient să: fie de modul egal, de sensuri contrare şi să aibă ca dreaptă suport dreapta care uneşte punctele lor de aplicaţie.
Corolar - ca să echilibrăm o rezultantă avem nevoie de o forţă egală şi opusă ca vector.
2. Putem adăuga unui sistem de forţe al unui rigid oricâte forţe care sunt în echilibru.
Corolar - putem deplasa pe dreapta suport punctul de aplicaţie
3. Două solide interacţionează conform principiului III al lui Newton.
4. Dacă un sistem de forţe este în echilibru asupra unui solid, atunci este asupra oricărui alt solid **rigid**.
5. Dacă un corp este în echilibru fiind deformabil, atunci este şi după solidificare. Nu şi invers neapărat.

Regula paralelogramului **postulează** că rezultanta a două forţe egale aplicate în acelaşi punct este în planul forţelor pe direcţia bisectoarei şi în acelaşi punct.
La mai mult de două forţe se aplică regula paralelogramului încă odată, ca o iteraţie sau poligonul funicular.
Consecinţă - trei forţe în echilibru trebuie să fie coplanare, neparalele şi concurente. Dacă un corp este în echilibru sub acţiunea a trei forţe coplanare şi neparalele atunci ele trebuie să fie concurente.
Există şi inversul compunerii forţelor, descompunerea forţelor.

Axioma legăturilor. Orice solid cu legături îl putem presupune liber înlocuind legăturile cu reacţiuni (şi bineînţeles păstrând forţele existente).
Exemple de legături - reazem, contact cu suprafeţe, articulaţie axială, articulaţie sferică, tije, fire, încastrări.
1. Deplasarea unei forţe pe dreapta suport prin introducerea unei perechi acţiune - reacţiune. F_a şi F_c cel mult deformează rigidul (îl alungesc).
2. Paralel cu ea însăşi (echipolent), astfel încât $\vec{F}_a, \left(-\vec{F}_b\right)$ formează un cuplu.
3. Momentul unui cuplu (R_F=0) este, indiferent de polul ales:

$$\begin{cases} \vec{M} = \left(\vec{r}_a \times \vec{F}_a\right) + \left(\vec{r}_b \times \vec{F}_b\right) = \vec{r}_a \times \vec{F} - \vec{r}_b \times \vec{F} \\ \vec{M} = \left(\vec{r}_a - \vec{r}_b\right) \times \vec{F} \equiv \Delta\vec{r} \times \vec{F} \end{cases} \qquad (6.389$$

$$M = (\Delta r)\sin\alpha F = bF, \qquad (6.399$$

unde b este braţul forţei, perpendicular pe forţă

6.5.1 Compunerea forţelor paralele

Regula paralelogramului pare neputincioasă la compunerea unor forţe paralele fie ele de acelaşi sens sau de sens opus.
Într-adevăr, acestea nu pot fi aduse/reduse în acelaşi punct !!!
Cu ajutorul axiomelor precedente putem aduce problema la a folosi regula paralelogramului.
Introducem $-\vec{f}, \vec{f}$, şi rezultantele sunt concurente, şi le putem deplasa pe dreapta lor suport şi în mod evident dau rezultanta $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

$$\frac{f}{b_1} = \frac{F_1}{h} \text{ si } \frac{f}{b_2} = \frac{F_2}{h} \Rightarrow b_1F_1 = b_2F_2 \qquad (6.40)$$

a) sau folosind concluzia din relaţia precedentă: le mutăm echipolent într-un pol în care cuplurile să se anuleze, adică în locul cu $b_1F_1=b_2F_2$. Se observă că cele două momente rotesc invers.
Acest mod de rezolvare grafică este valabil şi la forţele paralele, dar opuse ca semn.

6.5.2 Problemă rezolvată

Care este forţa cu care pământul acţionează asupra unui corp mic (punct material) aflat la suprafaţa pământului?

Soluţie propusă

Consideră un corp mic (un punct material) pe suprafaţa Pământului, considerat ca sistem de referinţă neinerţial. Într-adevăr, un sistem de referinţă solidar legat de suprafaţa Pământului are permanent o acceleraţie centripetă.

În acest sistem de referinţă neinerţial vei lua în considerare forţa centrifugă de inerţie.

$$F_{efi} = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{R\cos\alpha} \qquad (6.41)$$

dar

$$\begin{cases} v = \omega \cdot r \\ v = \omega \cdot R\cos\rho \end{cases} \qquad (6.42)$$

deci

$$F_{efi} = m\omega^2 \cdot R \cdot \cos\rho \qquad (6.43)$$

Proiecţia forţei centrifuge de inerţie în lungul forţei de atracţie universală $\left(\vec{F}_{au}\right)$este:

$$F_{efi,r} = F_{efi}\cos\rho = m\omega^2 \cdot R \cdot \cos^2\rho \qquad (6.44)$$

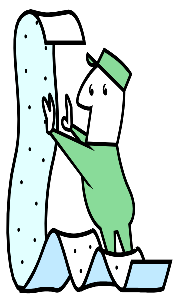
Iar devierea de la direcţia către centrului Pământului, *O,* a greutăţii (a firului cu plumb cu plumbul în punctul *M*) este dată de:

$$t\begin{cases} g\theta = \dfrac{componenta\ perpendiculară\ pe\ MO}{componenta\ de\ lungul\ lui\ MO} \\ tg\theta = \dfrac{m\omega^2 R\sin\rho\cos\rho}{mg_0 - m\omega^2 R\cos^2\rho} \end{cases} \qquad (6.45)$$

unde ρ este latitudinea geografică a locului, iar ω viteza unghiulară a Pământului:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} rad/s \qquad (6.46)$$

Pentru latitudinea României (aproximativ 45^o nord), modificarea greutăţii datorită rotaţiei pământului:



$$G = m\left(g_0 - \omega^2 R\cos^2\rho\right) = mg_0\left(1 - \frac{\omega^2 R\cos^2\rho}{g_0}\right)$$

$$\frac{\Delta G}{G_0} = \frac{\omega^2 R\cos^2\rho}{g_0} \approx \frac{1}{289} \qquad (6.47)$$

devierea este $\theta \approx 11' \approx \frac{1}{6}$ grade de arc

6.6 Mişcarea pe planul înclinat

Planul înclinat poate fi considerat un dispozitiv simplu, deoarece, de exemplu, serveşte la ridicarea corpurilor (rampa) sau la distanţarea a două corpuri (pana) ori la apropierea lor (şurubul). În acelaşi timp, planul înclinat este un mod de deplasare pentru a urca sau coborî gradat, treptat, la sau de la o înălţime: coborârea cu sania, cu schiurile, sau urcarea unei pante pe şosea sunt, astfel de exemple ale aplicaţiilor planului înclinat ca mod de deplasare.

Ce alte aplicaţii ale planului înclinat ca dispozitiv simplu cunoşti?

Dacă un corp alunecă liber pe un plan înclinat fără frecări, atunci poţi să afli acceleraţia de mişcare. Asupra corpului acţionează două forţe: greutatea sa $\vec{G}$ şi o reacţiune (normală) din partea planului (înclinat) $\vec{N}$.
Indicatorul rutier care arată o pantă de 7% ne spune că la fiecare 100 m parcurşi urcăm cu 7 m, respectiv sin α = 0,07.
Deoarece rezultanta lor (şi deci şi acceleraţia $\vec{a}$) este în lungul planului înclinat vei alege un sistem de axe de coordonate cu una din axe paralelă la plan şi cu cea de a doua axă, perpendiculară pe planul înclinat. Atunci:

$$\vec{N} + \vec{G} = m\vec{a} \qquad (6.48)$$

pe direcţiile *Ox* respectiv *Oy*

$$\begin{cases} N_x + G_x = m \cdot a_x \\ N_y + G_y = m \cdot a_y \end{cases} \qquad (6.49)$$

dar $a_y = 0$, corpul nu se desprinde de plan şi deci $a = a_x$,

$$\begin{cases} G\sin\alpha = ma \\ N - G\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\alpha = ma \\ a = g\sin\alpha \end{cases} \qquad (6.50)$$

Mişcarea este uniform accelerată, spre în jos.
Dar dacă lansăm un corp în lungul unui plan înclinat? Poţi constata cu uşurinţă că în absenţa frecărilor ai exact acelaşi sistem de ecuaţii, deci

$$\begin{cases} N = G \cdot \cos\alpha \\ a = g \cdot \sin\alpha \end{cases} \qquad (6.51)$$

cu observaţia că acceleraţia va fi opusă sensului de mişcare (şi vitezei), deci mişcarea este uniform încetinită.
Considerând sensul de mişcare ca sens pozitiv poţi scrie relaţiile din Tabelul prezentat în Figura 6.13.

la urcare	la coborâre
$V = V_0 - (g \sin\alpha)\, t$	$V = V_0 + (g \sin\alpha)\, t$
$s = S_0 + V_0t - (g \sin\alpha) \frac{t^2}{2}$	$s = S_0 + Vot + \frac{t^2}{2}$

Figura 6.13

Dacă vei considera un singur sistem de axe, care să descrie de exemplu o lansare spre în sus, până când corpul se opreşte şi apoi revine spre baza planului înclinat, sistemul (1) poate descrie şi urcarea şi coborârea. Poziţia până la care ajunge corpul (şi se opreşte) este dată de

$$V_{final} = 0. \qquad (6.52)$$

$$0 = v_0 - (g \cdot \sin\alpha) \cdot t_{oprire} \qquad (6.53)$$

$$\begin{cases} S_{oprire} = \dfrac{v_0}{2g\sin\alpha} \\ t_{oprire} = \dfrac{v_0}{g\sin\alpha} \end{cases} \qquad (6.54)$$

Constaţi că la revenirea în punctul de plecare

$$V_{coborâre} = V_0, \qquad (6.55)$$

deoarece energia mecanică totală se conservă (nu există lucru mecanic al forţelor disipative).

$$\begin{cases} E_{total\ initial} = E_{total\ final} \\ E_{cinetic\ total} = E_{cinetic\ final} \end{cases} \qquad (6.56)$$

***Dar dacă apar forţe d frecare* ?** În primul rând, mai apare o forţă orientată împotriva mişcării (forţa de frecare la alunecare $F_{frecare\ la\ alunecare}$) care însă pentru cele două cazuri va avea sens diferit raportat la acelaşi sistem de axe.
La urcare

$$\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{frecare\ de\ alunecare} = m\vec{a}_{urcare} \qquad (6.57)$$

La coborâre

$$\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}^*_{frecare\ de\ alunecare} = m\vec{a}_{coborâre} \qquad (6.58)$$

sau, pentru axele cu orientare în sus:

$$\begin{cases} -G_x - F_{frecare\ \ x} = ma_u \\ N_y - G_y = 0 \end{cases} \qquad (6.59)$$

$$\begin{cases} -G_x + F_{frecare\ \ x} = m\vec{a}_c \\ N_y - G_y = 0 \end{cases} \qquad (6.60)$$

Dacă ţii cont că

$$F_{frecare\ la\ alunecare} = \mu \cdot N = F^*_{frecare\ la\ alunecare} \qquad (6.61)$$

componentele forţelor fiind aceleaşi.

$$F_{fa} = F^*_{fa} = \mu \cdot G \cdot \cos\alpha \qquad (6.62)$$

$$a_u = -g(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) \qquad (6.63)$$

mişcare încetinită spre în sus

$$a_c = -g(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha) \qquad (6.64)$$

mişcare cu acceleraţia orientată spre în jos, mişcare accelerată.

Un caz aparte este dacă mărimea forţei de frecare la alunecare

$$\mu\cdot N = \mu\cdot G\cdot\cos\alpha \qquad (6.65)$$

este mai mare decât componenta *G*x

$$G_x = G\cdot\sin\alpha \qquad (6.66)$$

Acceleraţia de coborâre ar putea deveni pozitivă (adică spre în sus)? Concluzia ar fi absurdă pentru că ar însemna că după oprire corpul ar continua să urce! Rezultă că după oprire, corpul nu mai poate coborî. deoarece forţa activă, *G sin* α, nu poate determina alunecarea. Forţa de frecare capătă semnificaţia frecării statice şi este mai mică decât F_{fa}, deci mai mică decât μ *G cos* α şi egală, evident, cu G sin α.

$$F_{f,static} = G\cdot\sin\alpha \qquad (6.67)$$

în această aplicaţie.

6.7 Sisteme echivalente de forţe

Dacă forţa rezultantă are ca efect accelerarea sistemului (translaţie), iar momentul rezultant are ca efect rotaţia corpului sau a punctului material - în jurul unei axe, înseamnă că pentru a înlocui mai multe forţe cu o rezultantă aceasta trebuie să producă acelaşi rezultat atât la translaţie cât şi la rotaţie.

Două sisteme de forţe sunt echivalente dacă au aceeaşi rezultantă şi acelaşi moment rezultant (calculat faţă de acelaşi pol).

Consideră un sistem de (două sau mai multe) forţe paralele, cu acelaşi sens. Rezultanta este :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \qquad (6.68)$$

şi deoarece forţele sunt paralele cu aceeaşi axă:

$$R = F_1 + F_2 + \dots \qquad (6.69)$$

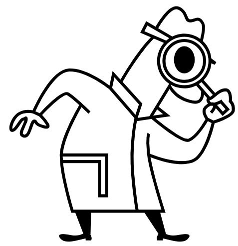
Momentul rezultantei respectă relaţiile

$$\begin{cases} M_R = M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} + \dots \\ M_R = b_1\cdot F_1 + b_2\cdot F_2 + b_3\cdot F_3 + \dots \end{cases} \qquad (6.70)$$

Echivalenţa a două sisteme de forţe presupune aceeaşi rezultantă şi acelaşi moment rezultant indiferent de felul sau orientările forţelor.

9. Centrul forţelor paralele. Centrul de greutate. Centrul de masă

Dacă vei considera un punct de referinţă, şi două forţe paralele plasate în poziţiile x_1 respectiv x_2 faţă de O, atunci relaţia dedusă pentru aflarea poziţiei acestui suport al rezultantei, devine:



$$\begin{cases} x_R = \dfrac{x_1F_2 + x_2F_2}{F_1 + F_2} \\ x_R = \dfrac{x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3}{F_1 + F_2 + F_3 + ...} = \dfrac{\Sigma x_i F_i}{\Sigma F_i} \end{cases} \qquad (6.71)$$

Dar, acesta este şi cazul greutăţilor părţilor unui sistem de corpuri (sau corpuri şi puncte materiale), care pot fi glisate astfel încât să aplicăm relaţia de mai sus:

$$x_{centru\ de\ greutate} = \frac{\Sigma x_i G_i}{\Sigma G_i} = \frac{\Sigma x_i n_i g}{\Sigma m_i g} = \frac{\Sigma x \int i m_i}{\Sigma m_i} \qquad (6.72)$$

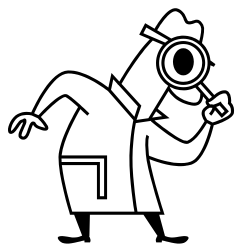
Relaţie care se scrie mai elegant

$$x_{c\ greutate} \equiv x_{c\ mas\breve{a}} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma mi} = \frac{\Sigma m_i x_i}{masa\ \ total\breve{a}} \qquad (6.73)$$

Dacă vei considera şi poziţia referitoare la o axă Oy

$$y_{c\ greutate} \equiv y_{c\ mas\breve{a}} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i y_i}{m} \qquad (6.74)$$

Centrul forţelor paralele este acelaşi indiferent de sistemul de axe considerat. Centrul de greutate respectiv centrul de masă se află în acelaşi loc, pentru acelaşi corp sau sistem de corpuri fixe.
Stewin, pe la 1600, fără să cunoască noţiunile de funcţii trigonometrice, sinus or cosinus sau proiecţiile forţelor, descompunerile, a imaginat echilibrul acestui lanţ, pornind de la ... catetele triunghiului dreptunghic.
Este poate , prima experienţă mentală exceptând un posibil raţionament mintal al lui Arhimede



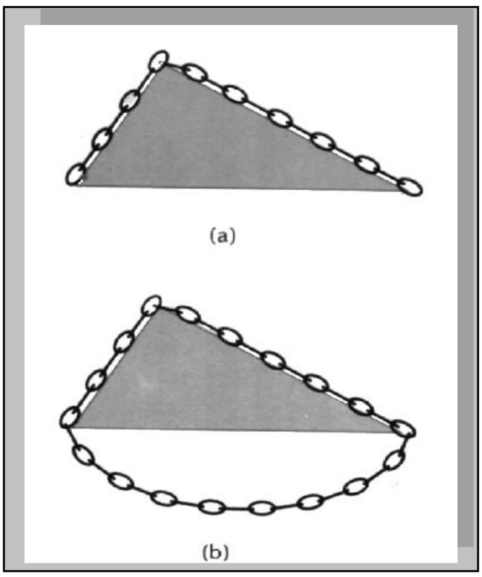


Figura 6.14

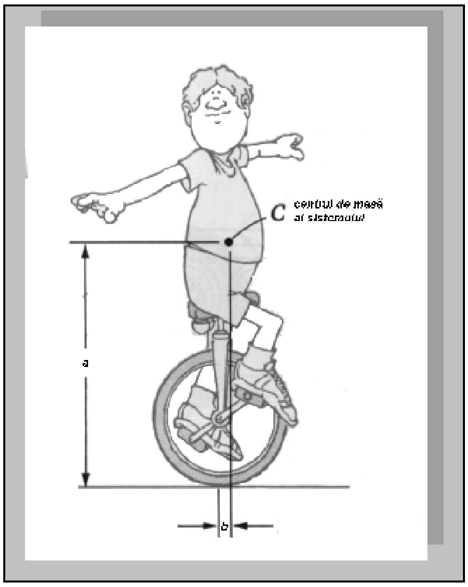


Figura 6.15 Echilibristul din imagine poate sta pe o singură roată pentru co centrul său de greutate cade în interiorul suprafeţei pe care roata se sprijină.

6.8 Mecanică relativistă

Conform principiului inerţiei, mişcarea rectilinie uniformă se autoîntreţine, adică nu necesită nici o acţiune exterioară pentru menţinerea ei. Dimpotrivă, orice acţiune exterioară strică o astfel de mişcare, curbând traiectoria sau modificând valoarea vitezei, adică produce o mişcare accelerată.

Reaminteşte-ţi transformările „Galilei”!

Dacă principiul inerţiei este valabil într-un sistem de referinţă dat, atunci el va fi valabil în toate sistemele de referinţă care se mişcă rectiliniu uniform faţă de acesta. Sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţiei se numesc sisteme de referinţă inerţiale. Un sistem de referinţă legat de "planeta" Pământ nu este riguros inerţial, din cauza rotaţiei diurne a Pământului, dar într-o primă aproximaţie putem considera sistemul de referinţă legat de Pământ ca fiind practic inerţial. Din punct de vedere al principiului inerţiei toate sistemele de referinţă inerţiale sunt absolut echivalente, nici unul nu poate fi considerat fix sau absolut.
O formulare generală a principiului inerţiei este următoarea: corpurile suficient de îndepărtate unele de altele (izolate între ele) se mişcă unele faţă de altele rectiliniu uniform.

Este important de stabilit legătura dintre coordonatele unui eveniment faţă de diferite sisteme de referinţă, adică transformările de coordonate care stabilesc trecerea de la un sistem de referinţă la altul. Astfel, poţi stabili care aspecte ale fenomenelor şi legilor sunt relative, adică depind de sistemul de referinţă ales, şi care sunt absolute sau invariante, adică independente de alegerea sistemului de referinţă. Ceea ce doreşti să

stabileşti este legătura dintre coordonatele $(\vec{r},t)$ măsurate în sistemul S şi coordonatele $(\vec{r}\,',t')$ măsurate în sistemul S', aflat în mişcare rectilinie uniformă faţă de S.

Consideră două sisteme de referinţă notate cu S şi S'. Presupune că S' se mişcă faţă de S rectiliniu uniform cu viteza constantă $\vec{u}$. Faţă de sistemul S, aplicând regula adunării vectoriale, vei avea:

$\vec{r}\,'=\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{u}t$, $t'=t-t_0$,

unde ut reprezintă distanţa OO' dintre originile celor două sisteme de referinţă şi toate mărimile sunt măsurate în sistemul S.

În mecanica clasică newtoniană consideri că distanţele şi intervalele de timp, măsurate în diferite sisteme de referinţă, sunt aceleaşi, adică au un caracter absolut sau invariant.

Relaţiile de mai sus se numesc transformările lui Galilei şi dau relaţiile de trecere de la un sistem de referinţă la altul care se mişcă rectiliniu uniform faţă de primul. Aceste relaţii permit determinarea coordonatelor $(\vec{r}\,',t')$ ale unui eveniment din sistemul S' dacă se cunosc coordonatele $(\vec{r},t)$ ale aceluiaşi eveniment în sistemul S.

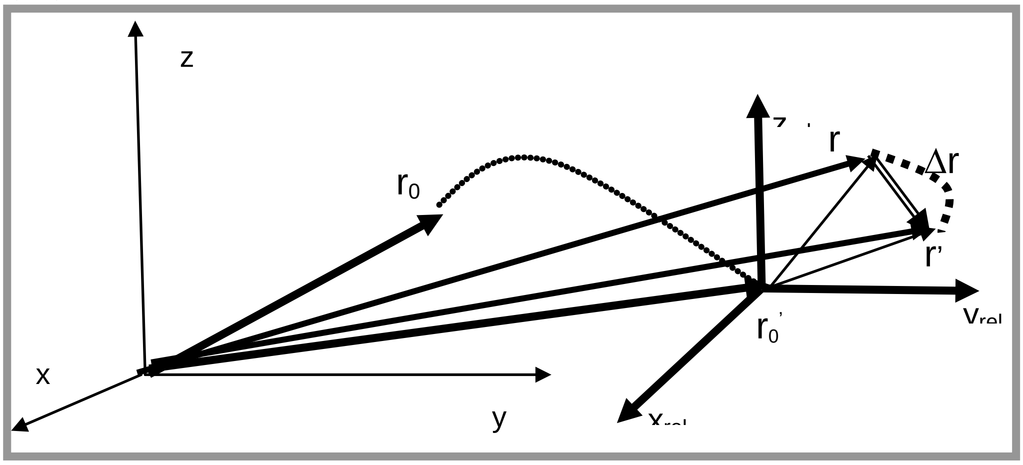


Figura 6.16

Scrie transformările inverse, de trecere de la sistemul S' 'a S,

$$\begin{cases}\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{r}_0+\vec{u}(t'+t_0)\\ t=t'+t_0\end{cases}, \qquad (6.75)$$

şi diferenţiază-le

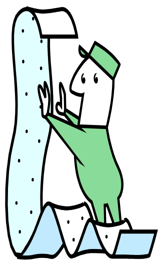
$$\begin{cases}d\vec{r}=d\vec{r}\,'+\vec{u}dt'\\ dt=dt'\end{cases} \qquad (6.76)$$

Dacă împarţi relaţiile de mai sus termen la termen

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}\,'+\vec{u}dt'}{dt'}=\frac{d\vec{r}\,'}{dt}+\vec{u} \qquad (6.77)$$

vei obţine foarte uşor legea clasică de compunere a vitezelor

$$\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}\ , \qquad (6.78)$$



adică viteza unui corp faţă de sistemul S este egală cu viteza "relativă" faţă de sistemul S' adunată vectorial cu viteza de "transport" a sistemului S' faţă de S.

Albert Einstein

Diferenţiind relaţiile de compunere a vitezelor şi împărţindu-le la *dt=dt'*, vei obţine legea de compunere a acceleraţiilor:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}'}{dt} \Rightarrow \\ a = \vec{a}', \end{cases} \qquad (6.79)$$

deoarece

$$\vec{u} = \text{const si } d\vec{u} = 0 \qquad (6.80)$$

adică acceleraţia este aceeaşi în toate sistemele de referinţă care se mişcă uniform unele faţă de altele. Acceleraţia este invariantă faţă de sistemele de referinţă aflate în translaţie relativă uniformă. Dacă acceleraţia este nulă într-un sistem S, adică, corpul este în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform faţă de S, atunci acceleraţia va fi nulă în orice sistem care se mişcă rectiliniu uniform faţă de primul. Dacă principiul inerţiei este valabil faţă de un sistem de referinţă, deci acesta este inerţial, atunci acest principiu este valabil în toate sistemele de referinţă aflate în mişcare de translaţie uniformă faţă de primul, şi care vor fi de asemenea inerţiale. Reciproc, dacă două sisteme de referinţă sunt inerţiale, atunci ele se află în translaţie uniformă unul faţă de celălalt.

În 1863 J.C. Maxwell a formulat legile electromagnetismului şi teoria electromagnetică a luminii. Ecuaţiile lui Maxwell nu sunt invariante la transformările lui Galilei, deci legile fenomenelor electromagnetice şi optice ar trebui să difere de la în sistem de referinţă inerţial la altul. Numeroase experienţe au pus în evidenţă că nici prin mijloace optice, nici electromagnetice nu se poate determina mişcarea unui sistem inerţial şi că viteza luminii în vid este independentă de mişcarea inerţială a sursei sau observatorului. Aceasta contrazice legea clasică de adunare a vitezelor şi transformările lui Galilei.

Contradicţia a fost rezolvată în 1905 de Albert Einstein (1879-1955) prin formularea teoriei relativităţii. Pe baza rezultatelor experimentale, Einstein a enunţat postulatele teoriei relativităţii:

1) Toate legile fizicii, nu numai cele mecanice, sunt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale.

2) Viteza maximă de propagare a interacţiunilor sau a energiei este finită şi aceeaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale, deci o constantă universală. Această viteza absolută coincide cu viteza luminii în vid.

Din al doilea postulat rezultă inexistenta corpurilor absolut rigide, deoarece cu o bară absolut rigidă, prin simpla ei împingere, s-ar transmite instantaneu energie altui corp.

6.9 Transformările lui Lorentz

Consideră sistemele de coordonate din Figura 6.17 y şi z nu sunt afectate de mişcarea reciprocă a sistemelor, fiind transversale pe direcţia de mişcare, deci y'=y şi z'=z. Pentru coordonatele x' şi x trebuie să existe o relaţie liniară de forma:

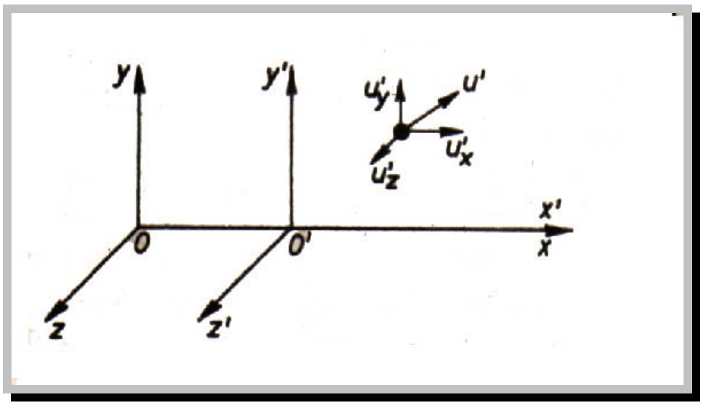


Figura 6.17

$$x' = \alpha(x - ut) \qquad (6.81)$$

unde α nu depinde de coordonate, ci eventual de viteza u de transport dintre cele două sisteme de referinţă. Analog, vei avea:

$$x = \alpha(x' + ut'). \qquad (6.82)$$

Coeficientul α trebuie să fie acelaşi, în virtutea echivalenţei sistemelor inerţiale şi a primului postulat al teoriei relativităţii. În cazul transformărilor lui Galilei $\alpha=1$.

Foloseşte postulatul al doilea pentru determinarea lui α. Presupune că în momentul iniţial, când originile celor două sisteme de referinţă coincid, se emite un semnal luminos din origine în direcţia axei Ox. Un punct oarecare în care ajunge semnalul are coordonata $x=ct$ în sistemul S şi $x'=ct'$ în sistemul S'. Aplicând transformările de coordonate pentru acest punct, vei obţine:

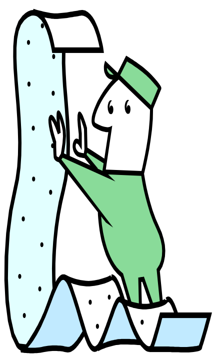
$$\begin{cases} ct' = \alpha(c-u)t \\ ct = \alpha(c+u)t' \end{cases}, \qquad (6.83)$$

de unde, înmulţind membru cu membru:

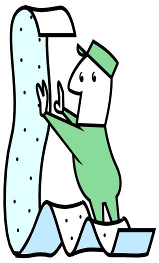
$$c^2 = \alpha^2(c^2 - u^2) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (6.84)$$

unde $\beta = \frac{u}{c}$, deci:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x = \dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (6.85)$$



şi



$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (6.86).$$

Relaţiile de mai sus se numesc *transformările Lorentz*,
Transformările lui Galilei se obţin la limita $c \to \infty$ sau când $u \ll c$. Conform primului postulat, toate legile fizicii sunt invariante la transformările lui Lorentz. Viteza maximă c, egală cu viteza luminii în vid, nu poate fi depăşită.
Diferenţiind transformările lui Lorentz, vei obţine:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{dx' + udt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \\ dt = \dfrac{dt' + \dfrac{udx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (6.87)$$

Împărţind primele trei ecuaţii la ultima, poţi obţine relaţiile de compunere a vitezelor în mecanica relativistă

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + \dfrac{udx'}{c^2}} = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{v'_x u}{c^2}} \qquad (6.88)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \dfrac{udx'}{c^2}} = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{v'_x u}{c^2}} \qquad (6.89)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \dfrac{udx'}{c^2}} = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{v'_x u}{c^2}}. \qquad (6.90)$$

sau relaţiile

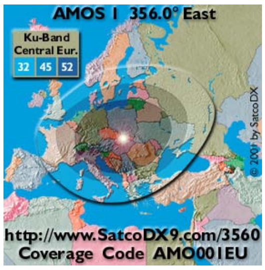
$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x u}{c^2}}, \qquad (6.91)$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x u}{c^2}}, \qquad (6.92)$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x u}{c^2}}. \qquad (6.93)$$

Pentru cazul limită, u<<c, vei regăsi formulele de compunere a vitezelor din mecanica clasică. Compunerea vitezelor în mecanica relativistă arată că viteza c nu poate fi depăşită.

6.9.1 Consecinţe ale transformărilor lui Lorentz:



1) *Contracţia lungimilor*. Un acelaşi corp are lungimi diferite dacă sunt măsurate în sisteme de referinţă diferite. Fie o riglă aşezată în direcţia axei Ox în repaus în sistemul de referinţă S, având lungimea $l_0=x_2-x_1$. Lungimea riglei, măsurată în S', va fi dată tot de diferenţa coordonatelor capetelor riglei luate în acelaşi moment de timp t':

$$\begin{cases} l=\left(x'_2-x'_1\right)\big|_{t'}=\left(x_2\sqrt{1-\beta^2}-ut'\right)-\left(x_1\sqrt{1-\beta^2}-ut'\right)= \\ l=\left(x_2-x_1\right)\sqrt{1-\beta^2}=l_0\sqrt{1-\beta^2}<l_0 \end{cases} \qquad (6.94)$$

Deci, *lungimea măsurată în sistemul de coordonate propriu (faţă de care rigla este în repaus) este maximă*. Acelaşi rezultat se obţine şi dacă se consideră rigla în repaus faţă de sistemul S'.

Deoarece coordonatele transversale nu se modifică (*y=y' şi z=z'*), volumul se contractă în acelaşi raport ca şi lungimea, adică:
$V=V_0\sqrt{1-\beta^2}$.

2) *Dilatarea duratelor*. Duratele aceluiaşi proces au valori diferite dacă sunt măsurate în sisteme de referinţă diferite. Fie un proces care are loc în sistemul S, într-un punct de abscisă x, ce are durata $\tau_0=t_2-t_1$. Durata aceluiaşi proces, măsurată în S', în acelaşi punct de abscisă x este:

$$\tau=\left(t'_2-t'_1\right)\big|_x=\frac{t_2-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{t_1-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{t_2-t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}>\tau_0 \qquad (6.95).$$

Deci, *durata măsurată în sistemul de referinţă propriu este minimă*. Acelaşi rezultat se obţine şi dacă procesul are loc în punctul x' din sistemul S'.
Rezultă astfel *caracterul relativ al simultaneităţii*, adică două evenimente simultane în sistemul S, nu mai sunt simultane în sistemul S'.

Din relaţiile de mai sus rezultă că produsul dVdt este un invariant faţă de transformările Lorentz:

$$dVdt=dV_0\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=dV_0dt_0 \qquad (6.96)$$

6.10 Elemente de dinamică relativistă

Primul postulat al mecanicii relativiste afirmă că toate legile fizicii sunt invariante, deci şi legea conservării impulsului definit prin $\vec{p} = m\vec{v}$. Prin urmare, dacă impulsul este definit de produsul dintre masă şi viteză şi în mecanica relativistă, la fel ca în mecanica clasică, atunci, pentru ca legea de conservare a impulsului să fie invariantă la transformările Lorentz, masa trebuie să depindă de sistemul de referinţă faţă de care o măsurăm, adică: $m\vec{v} = m'\vec{v}'$. Dacă relaţia este valabilă vectorial, atunci ea trebuie să fie valabilă şi pentru fiecare componentă în parte.
Scrie această relaţie pentru componenta în direcţia axei Oy a unui corp de masă m în sistemul S şi masa m' în sistemul S' şi să ţine seama de relaţiile de compunere relativistă a vitezelor:

$$m'v'_y = mv_y = m\frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v'_x u}{c^2}} \Rightarrow m' = m\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v'_x u}{c^2}}. \qquad (6.97)$$

Consideră sistemul de referinţă S' ca fiind sistemul de referinţă propriu, adică sistemul în care corpul este în repaus: $v'_x=0$. Atunci masa corpului în sistemul de referinţă S' este $m'=m_0$ şi se numeşte *masă de repaus*. Cu aceste presupuneri, relaţia de mai sus devine:

$$m_0 = m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (6.98)$$

Deci, *masa unui corp este minimă în sistemul propriu de referinţă*. Atunci când u=c, $m_0=0$, adică un corp care se mişcă cu viteza luminii are masă de repaus nulă.
În continuare vei considera sistemul S ca fiind sistemul de referinţă propriu şi viteza de transport a sistemului S' fiind egală cu v. În acest caz, vei utiliza indicele "0" pentru sistemul de referinţă propriu. Cu aceste notaţii, impulsul relativist se va scrie:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}. \qquad (6.99)$$

Legea a doua a dinamicii pentru mecanica relativistă este:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\vec{a} + \frac{m_0\vec{v}}{c^2}\frac{\vec{v}\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m\vec{a} + \frac{m(\vec{v}\vec{a})\vec{v}}{c^2-v^2}, \qquad (6.100)$$

deci forţa nu este coliniară cu acceleraţia. Dacă particula se mişcă cu viteză apropiată de viteza luminii, atunci forţa aplicată produce o acceleraţie mai mică decât în cazul clasic şi deviată spre normala la traiectorie. Este din ce în ce mai greu de modificat modulul vitezei în comparaţie cu direcţia vitezei.

Teorema de conservare a energiei cinetice, trebuie să fie aceeaşi şi în mecanica relativistă, adică lucrul mecanic al forţei aplicate punctului material trebuie să fie egal cu variaţia energiei cinetice:

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}dt = \frac{d(m\vec{v})}{dt}\vec{v}dt = d(m\vec{v})\vec{v} = v^2dm + mvdv \qquad (6.101)$$

unde s-a utilizat legea a doua a dinamicii în exprimarea forţei.
Dar,

$$dm = \frac{mvdv}{c^2 - v^2} \Rightarrow mvdv = (c^2 - v^2)dm, \qquad (6.102)$$

astfel încât

$$dL = v^2dm + (c^2 - v^2)dm = c^2dm = dE_c \qquad (6.103),$$

de unde după integrare vei obţine:

$$E_c = mc^2 - m_0c^2, \qquad (6.104)$$

unde $E_0=m_0c^2$ este *energia de repaus*, iar $E=mc^2$ este *energia totală*. Prin urmare, orice variaţie de energie este însoţită de o variaţie corespunzătoare a masei, şi reciproc, adică *legea de conservare a energiei este şi o lege de conservare a masei*.
În mecanica clasică, energia totală se defineşte până la o constantă arbitrară, în mecanica relativistă energia de repaus precizează această constantă în mod univoc.

Cunoşti că în mecanica clasică $E = \frac{p^2}{2m}$ şi vrei să determini relaţia analogă în cazul mecanicii relativiste.
Din relaţiile de definiţie ale impulsului şi energiei, poţi determina viteza particulei în funcţie de impuls şi energie:

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} \\ E &= mc^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}. \qquad (6.105)$$

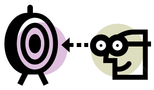
Înlocuind această valoare în expresia energiei, vei obţine

$$E = mc^2 \Rightarrow E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}\ . \qquad (6.106)$$

Pentru particule cu masă de repaus nulă, *E=pc*.
Teoria relativităţii a fost verificată şi se aplică în cazul particulelor elementare (electroni, neutroni, protoni, etc.) accelerate la viteze mari, în cazul reacţiilor nucleare, în cazul fotonilor, etc

6.11Test de autoevaluare 6.1

Răspunde la următoarele întrebări:



1. Ce este forţa de atracţie gravitaţională?

2. Ce este energia potenţială gravitaţională?

3. Cum se compun două forţe concurente?

4. Care sunt postulatele teoriei relativităţii?

5. Cum variază masa la viteze mari?

Răspunsurile le găseşti la pagina 157

6.12 Lucrări practice

1. Foloseşte un lănţişor de pus la gât, ori un fir flexibil sau chiar un lanţ subţire, cu zale mai mici. Dacă aşezi lanţul pe masă acesta este în repaus. Dacă o porţiune din lanţ atârnă peste marginea mesei, există o situaţie când lanţul începe să alunece. Măsoară şi notează lungimile porţiunilor din lănţişor aflate pe verticală şi pe masă.

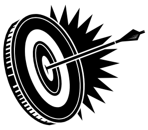
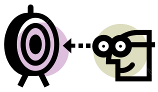
2. Raportul lor, în această ordine, este chiar coeficientul de frecare la alunecare, dintre lanţ şi suprafaţa de pe masă. Repetă experienţa cu altă suprafaţă, o faţă de plastic, o pătură, o faţă de masă şi calculează de fiecare dată coeficientul de frecare la alunecare, dintre lanţ şi suprafaţa de pe masă.

3. Lăsă lanţul să alunece, cronometrează durata mişcării până la desprindere şi calculează viteza medie. A fost mişcarea uniformă? A fost mişcarea uniform accelerată ?

4. Ai putea face un semn la jumătatea porţiunii de pe masă şi dacă mişcarea nu e prea rapidă şi lanţul prea lung, poţi cronometra timpul de parcurgere a primei jumătăţi şi al celei de a doua (sau treimi, sau sferturi – dacă alunecarea e pe o pătură mai aspră).

Din compararea timpilor menţionaţi vei putea eventual aprecia ce fel de mişcare este mişcarea lanţului.

6.13 Răspunsuri la testul de autoevaluare

Răspunsuri la Testul de autoevaluare 6.1

1. Forţa de atracţie dintre două corpuri suficient de depărtate pentru a fi considerate puncte materiale este: $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$.

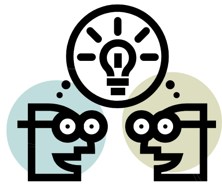
2. Energia potenţială gravitaţională este energia unui corp în câmpul gravitaţional numeric egală cu lucrul mecanic necesar ridicării unui corp în câmpul gravitaţional.

3. Două forţe concurente se compun după regula paralelogramului.

4. Toate legile fizicii, nu numai cele mecanice, sunt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale.

Viteza maximă de propagare a interacţiunilor sau a energiei este finită şi aceeaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale, deci o constantă universală. Această viteza absolută coincide cu viteza luminii în vid.

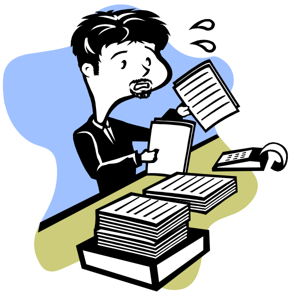
5. $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$



6.14 Termeni şi expresii cheie. Formule cheie

Termeni şi expresii cheie

- Forţa Coriolis;
- Câmp gravitaţional;
- Intensitatea într-un punct al câmpului gravitaţional; linii de câmp
- Masă gravifică; masă inerţială;
- Sisteme echivalente de forţe;
- Centrul forţelor paralele; centru de greutate; centru de masă;
- Contracţia lungimilor; dilatarea duratelor;relativitatea simultaneităţii;
- Masă de repaus; masă de mişcare;
- Energie de repaus; energie totală;

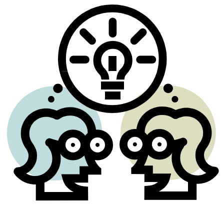


Formule cheie

- $\vec{F} = -k\dfrac{m_1 m_e}{r_2}\dfrac{\vec{r}}{r}$
- $\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$
- $\begin{cases} t' = \dfrac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$
- $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$; $\vec{p} = m\vec{v} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$
- $E_c = mc^2 - m_0 c^2$

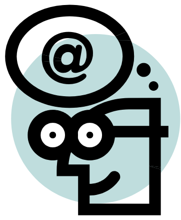
Legi cheie

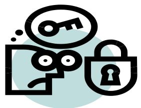
- Legea atracţiei universale
- Legile lui Kepler
- Postulatele teoriei relativităţii restrânse



6.15 Lucrare de verificare 6

Rezolvă cerinţele de mai jos şi trimite tutorelui rezultatele pe care le consideri corecte.



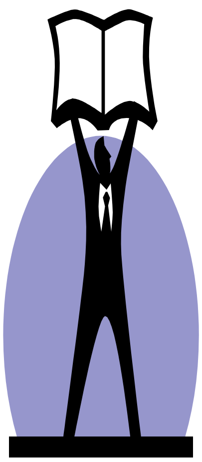


Rezolvă problemele propuse. Efectuează lucrarea de laborator. Folosind un editor de texte redactează o scrisoare cu răspunsurile pe care trimite-le tutorelui.

1. Cum se compun vitezele în mecanica relativistă? *(1 punct)*
2. Cum variază masa în mecanica relativistă? *(1 punct)*
3. Care este deosebirea – cantitativă – dintre greutate şi forţa de atracţie universală. *(1 punct)*
4. Calculează durata traversării pământului, printr-un tunel imaginar, prin centrul pământului, în cădere liberă *(3 puncte)*
5. Efectuează lucrarea practică. Redactează – folosind un program de editare de texte – un protocol al lucrării tale în care prezintă rezultatele măsurătorilor şi calculele asociate *(3 puncte)*

Notă: Se va acorda un punct din oficiu *(1 punct)*

Total *10 puncte*



6.16 Bibliografie

1. P. Hristev, Curs de Mecanică Fizică şi Acustică, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981 (paginaţia corespunde ediţiei a II-a), pag. 161-175
2. P. Hristev, V. Fălie, D. Manda, Fizica, Manual pentru clasa a IX-a, Ed. Pedagogică, Bucureşti, 1979, 1981, 1984, pag. 113-122
3. ***, Probleme de Fizică pentru clasele IX-X, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1983, pag. 32-35